מתמטיקה למדעי החיים

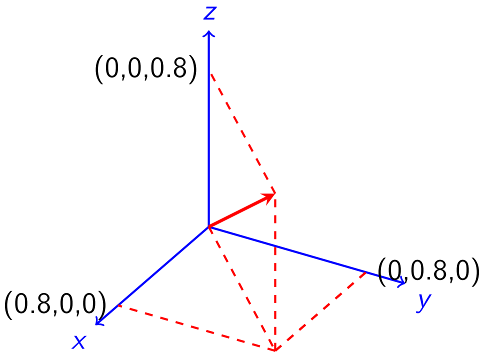
אלגברה לינארית

אמיר יהודיוף

הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

מימדים שלושה

נתחיל דיון יותר מעמיק בשלושה מימדים



מרחקים

הנורמה של $v = (x, y, z)$ היא

$$\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

והמרחק בין v_1, v_2 הוא

$$\|v_1 - v_2\|$$

חשבון

ניתן לחבר וקטורים:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

כמו כן, בהנתן מספר ממשי c ניתן להכפיל בו:

$$c(x, y, z) = (cx, cy, cz)$$

חיבור: נלך לפי הוראות ראשונות ואז שניות

כפל: נאריך, נקצר או נהפוך

מכפלה פנימית

בהנתן וקטורים $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ נגדיר מכפלה פנימית ביניהם

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

מכפלה פנימית

בהנתן וקטורים $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ נגדיר מכפלה פנימית ביניהם

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

נורמה:

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$$

מכפלה פנימית

בהנתן וקטורים $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ נגדיר מכפלה פנימית בניהם

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

נורמה:

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$$

תכונות: לכל וקטורים v_1, v_2, v_3 וקבוע c

$$\langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle$$
$$\langle c v_1, v_2 \rangle = c \langle v_1, v_2 \rangle$$
$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$$

זוויות

משפט: בהנתן וקטורים v_1, v_2 שאינם אפס הזווית בניהם מקיימת

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$$

ראינו בשני מימדים

זה נכון גם בשלושה מימדים - שני וקטורים תמיד נמצאים על מישור

מישורים

א. אוסף הנקודות (x, y, z) כך ש

$$ax + by + cz = d$$

הוא מישור

ב. המישור מאונך לוקטור (a, b, c), כמו בשני מימדים -
אם v_1, v_2 במישור אז

$$\langle v_1 - v_2, (a, b, c)\rangle = 0$$

ג. הוקטור

$$\frac{(a, b, c)}{\|(a, b, c)\|}$$

הוא הנורמל למישור

מישור דרך נקודה

מהו מישור $ax+by+cz=d$ שמכיל (x_0,y_0,z_0)?

מישור דרך נקודה

מהו מישור $ax + by + cz = d$ שמכיל (x_0, y_0, z_0)?

תשובה אפשרית -

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

מישור דרך שלוש נקודות

מהי משוואת המישור $ax + by + cz = d$ שמכיל
$(1, 2, -1), (0, 1, -1), (1, 1, 0)$?

מישור דרך שלוש נקודות

מהי משוואת המישור $ax+by+cz=d$ שמכיל
$(1,2,-1),(0,1,-1),(1,1,0)$?

שלוש משוואות בארבעה נעלמים -

$$a+2b-c=d,\ \ b-c=d,\ \ a+b=d$$

מישור דרך שלוש נקודות

מהי משוואת המישור $ax+by+cz=d$ שמכיל
$(1,2,-1),(0,1,-1),(1,1,0)$?

שלוש משוואות בארבעה נעלמים -

$$a+2b-c=d,\ \ b-c=d,\ \ a+b=d$$

כלומר

$$\begin{aligned} L-R \to b-c&=0\\ \to d&=0\\ \to c&=b, a=-b \end{aligned}$$

נבחר $b=1$ למשל ונקבל

$$-x+y+z=0$$

מישור דרך שלוש נקודות

תרגיל: מיצאו הצגה פרמטרית של המישור שמכיל

$$(1,2,-1),(0,1,-1),(1,1,0).$$

מישור דרך שלוש נקודות

תרגיל: מיצאו הצגה פרמטרית של המישור שמכיל

$$.(1,2,-1),(0,1,-1),(1,1,0)$$

באופן כללי -

$$v_1 + x(v_2 - v_1) + y(v_3 - v_1)$$

ובאופן פרטי -

$$(1,2,-1) + x(-1,-1,0) + y(0,-1,1) = (1-x, 2-x-y, -1+y)$$

מישור דרך שלוש נקודות

תרגיל: מיצאו הצגה פרמטרית של המישור שמכיל

$$.(1,2,-1),(0,1,-1),(1,1,0)$$

באופן כללי -

$$v_1 + x(v_2 - v_1) + y(v_3 - v_1)$$

ובאופן פרטי -

$$(1,2,-1) + x(-1,-1,0) + y(0,-1,1) = (1-x, 2-x-y, -1+y)$$

נשים לב: פתרון של משוואה שמצאנו קודם

$$-(1-x) + (2-x-y) + (-1+y) = 0$$

חיתוך בין שני מישורים

אם

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

אינם מקבילים, מהו החיתוך ביניהם?

חיתוך בין שני מישורים

אם

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1,\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

אינם מקבילים, מהו החיתוך ביניהם?

קו ישר שנמצא ע״י פתרון שתי משוואות בשלושה נעלמים, למשל

$$x + 2y - z = 1,\ 2x - y + z = 0$$

חיתוך בין שני מישורים

אם

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \;\; a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

אינם מקבילים, מהו החיתוך ביניהם?

קו ישר שנמצא ע״י פתרון שתי משוואות בשלושה נעלמים, למשל

$$x + 2y - z = 1, \;\; 2x - y + z = 0$$

נקבל

$$L + R \to 3x + y = 1 \to y = 1 - 3x$$

ובנוסף

$$z = y - 2x = 1 - 3x - 2x = 1 - 5x$$

חיתוך בין שני מישורים

אם

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \;\; a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

אינם מקבילים, מהו החיתוך בניהם?

קו ישר שנמצא ע״י פתרון שתי משוואות בשלושה נעלמים, למשל

$$x + 2y - z = 1, \;\; 2x - y + z = 0$$

נקבל

$$L + R \to 3x + y = 1 \to y = 1 - 3x$$

ובנוסף

$$z = y - 2x = 1 - 3x - 2x = 1 - 5x$$

כלומר, הישר הוא אוסף הנקודות (עבור x ממשי)

$$(x, 1 - 3x, 1 - 5x) = (0, 1, 1) + x(1, -3, -5)$$

זוויות

מהי הזווית α בין v למישור $ax + by + cz = 0$?

זוויות

מהי הזווית α בין v למישור $ax+by+cz=0$?

א. נתבונן במישור דרך הראשית, v ו (a,b,c)

ב. נסמן ב β את הזווית בין (a,b,c) ל v

ג. מתקיים
$$\alpha+\beta=\pi/2$$

ד. כלומר
$$\sin(\alpha)=\cos(\beta)=\frac{\langle v,(a,b,c)\rangle}{\|v\|\|(a,b,c)\|}$$

זוויות

מהי הזווית α בין המישורים

$$?a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \; a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

זוויות

מהי הזווית α בין המישורים

$$?a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, \; a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

α שווה לזווית בין הנורמלים -

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \rangle}{\|(a_1, b_1, c_1)\| \|(a_2, b_2, c_2)\|}$$

זוויות

בהנתן v נסמן ב α, β, γ זוויות בין v לצירים.

טענה:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

זוויות

בהנתן v נסמן ב α, β, γ זוויות בין v לצירים.

טענה:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

הוכחה:

א.

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle (0,0,1), v \rangle}{\|v\|} = \frac{v_3}{\|v\|}$$

זוויות

בהנתן v נסמן ב α, β, γ זוויות בין v לצירים.

טענה:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

הוכחה:

א.

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle (0,0,1), v \rangle}{\|v\|} = \frac{v_3}{\|v\|}$$

ב. באופן דומה

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = \frac{v_3^2 + v_2^2 + v_1^2}{\|v\|^2} = 1$$

זוויות

בהנתן מישור $ax+by+cz=0$ נסמן ב α,β,γ זוויות בינו למישורי הצירים.

טענה:

$$\cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)+\cos^2(\gamma)=1$$

זוויות

בהנתן מישור $ax+by+cz=0$ נסמן ב α,β,γ זוויות בינו למישורי הצירים.

טענה:

$$\cos^2(\alpha)+\cos^2(\beta)+\cos^2(\gamma)=1$$

הוכחה:

א. הזוויות הן כמו בין (a,b,c) לצירים

ב. טענה קודמת

הטלות

ההטלה של (x, y, z) על מישור xy היא $(x, y, 0)$

משמעות ציורית

באופן דומה לשני המישורים האחרים

הטלות

באופן כללי, ההטלה של v למישור $ax+by+cz=0$ היא

$$u = v - \frac{\langle v, (a,b,c)\rangle}{\|(a,b,c)\|^2} \cdot (a,b,c)$$

במילים: נחסר מ v את היטלו לכיוון מאונך למישור

הסבר: הטלה של v למישור H היא וקטור u כך ש

א. $u \in H$

ב. $u-v$ מאונך למישור H, כלומר $u-v$ מקביל ל (a,b,c)

הטלות של שטחים

נתבונן בצורה S המצוירת על מישור $a_1x+b_1y+c_1z=0$

נסמן ב P את ההטלה של S למישור $a_2x+b_2y+c_2z=0$

טענה: $area(P)=area(S)\cdot\cos(\alpha)$ כש α הזווית בין המישורים

הטלות של שטחים

נתבונן בצורה S המצוירת על מישור $a_1x+b_1y+c_1z=0$

נסמן ב P את ההטלה של S למישור $a_2x+b_2y+c_2z=0$

טענה: $area(P)=area(S)\cdot\cos(\alpha)$ כש α הזווית בין המישורים

הסבר:

א. נחשב שטח ע״י חלוקה למלבנים צרים מאונכים לישר החיתוך

ב. האורך משתנה פי $\cos(\alpha)$

שטחים של הטלות

נתבונן בצורה S המצוירת על מישור $ax+by+cz=0$

נסמן ב S_{xy} את ההטלה של S למישור xy ובאופן דומה S_{yz}, S_{xz}

טענה: $(area(S))^2=(area(S_{xy}))^2+(area(S_{yz}))^2+(area(S_{xz}))^2$

שטחים של הטלות

נתבונן בצורה S המצוירת על מישור $ax + by + cz = 0$

נסמן ב S_{xy} את ההטלה של S למישור xy ובאופן דומה S_{yz}, S_{xz}

טענה: $(area(S_{xz}))^2 + (area(S_{yz}))^2 + (area(S_{xy}))^2 = (area(S))^2$

הסבר: מטענות קודמות

$$
\begin{aligned}
&(area(S_{xy}))^2 + (area(S_{yz}))^2 + (area(S_{xz}))^2 \\
&= (area(S))^2 \cos^2(\alpha) + (area(S))^2 \cos^2(\beta) + (area(S))^2 \cos^2(\gamma) \\
&= (area(S))^2
\end{aligned}
$$

שטח של מקבילית

נתבונן במקבילית S הנוצרת על ידי (x_1, y_1, z_1) ו (x_2, y_2, z_2)

טענה: שטחה הוא

$$\sqrt{(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 + (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2}$$

שטח של מקבילית

נתבונן במקבילית S הנוצרת על ידי (x_1, y_1, z_1) ו (x_2, y_2, z_2)

טענה: שטחה הוא

$$\sqrt{(x_1y_2 - x_2y_1)^2 + (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (y_1z_2 - y_2z_1)^2}$$

הסבר: נובע מהטענה הקודמת כי למשל

$$area(S_{xy}) = |x_1y_2 - x_2y_1|$$

מכפלה וקטורית

נגדיר מכפלה וקטורית של $v_1=(x_1,y_1,z_1)$ ו $v_2=(x_2,y_2,z_2)$ ע״י

$$v_1 \times v_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1, -(x_1 z_2 - x_2 z_1), x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

מכפלה וקטורית

נגדיר מכפלה וקטורית של $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ו $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ע״י

$$v_1 \times v_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1, -(x_1 z_2 - x_2 z_1), x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

תכונות:

א. $\|v_1 \times v_2\|$ הוא שטח המקבילית ש v_1, v_2 יוצרים

$$\|v_1 \times v_2\| = \|v_1\| \|v_2\| \sin(\alpha) = \sqrt{\|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - (\langle v_1, v_2 \rangle)^2}$$

מכפלה וקטורית

נגדיר מכפלה וקטורית של $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ו $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ע"י

$$v_1 \times v_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1, -(x_1 z_2 - x_2 z_1), x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

תכונות:

א. $\|v_1 \times v_2\|$ הוא שטח המקבילית ש v_1, v_2 יוצרים

$$\|v_1 \times v_2\| = \|v_1\|\|v_2\| \sin(\alpha) = \sqrt{\|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - (\langle v_1, v_2 \rangle)^2}$$

ב. $v_1 \times v_2$ מאונך ל v_1, v_2 למשל

$$\langle v_1, v_1 \times v_2 \rangle$$
$$= x_1(y_1 z_2 - y_2 z_1) - y_1(x_1 z_2 - x_2 z_1) + z_1(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$$

וכיוונו - כלל יד ימין (מ1 ל2)

מכפלה וקטורית

נגדיר מכפלה וקטורית של $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ו $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ע"י

$$v_1 \times v_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1, -(x_1 z_2 - x_2 z_1), x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

תכונות:

א. $\|v_1 \times v_2\|$ הוא שטח המקבילית ש v_1, v_2 יוצרים

$$\|v_1 \times v_2\| = \|v_1\|\|v_2\| \sin(\alpha) = \sqrt{\|v_1\|^2\|v_2\|^2 - (\langle v_1, v_2\rangle)^2}$$

ב. $v_1 \times v_2$ מאונך ל v_1, v_2 למשל

$$\langle v_1, v_1 \times v_2\rangle$$
$$= x_1(y_1 z_2 - y_2 z_1) - y_1(x_1 z_2 - x_2 z_1) + z_1(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0$$

וכיוונו - כלל יד ימין (מ1 ל2)

ג. משמעות גיאומטרית נצייר כמה אפשרויות

חשבון

תזכורת: מכפלה וקטורית של $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ו $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ היא

$$v_1 \times v_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1, -(x_1 z_2 - x_2 z_1), x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

מתקיים: לכל שני וקטורים v_1, v_2 וקבוע c

$$v_1 \times v_1 = 0$$

$$v_1 \times v_2 = -(v_2 \times v_1)$$

$$(cv_1) \times v_2 = c(v_1 \times v_2)$$

$$v_1 \times (v_2 + v_3) = v_1 \times v_2 + v_1 \times v_3$$

מסקנה

טענה: משוואת המישור העובר דרך הראשית ו v_1, v_2 היא

$$\langle (x,y,z), v_1 \times v_2 \rangle = 0$$

מסקנה

טענה: משוואת המישור העובר דרך הראשית ו v_1, v_2 היא

$$\langle (x,y,z), v_1 \times v_2 \rangle = 0$$

הסבר: $v_1 \times v_2$ מאונך למישור

מסקנה

נתבונן בטטרהדר שפינותיו $0, v_1, v_2, v_3$

נסמן ב u_1, u_2, u_3, u_4 את המאונכים לארבעת הפאות עם אורך שהוא שטח הפאה

טענה: $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$

מסקנה

נתבונן בטטרהדר שפינותיו $0, v_1, v_2, v_3$

נסמן ב u_1, u_2, u_3, u_4 את המאונכים לארבעת הפאות עם אורך שהוא שטח הפאה

טענה: $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$

הסבר: מציור -

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$
$$= \frac{v_1 \times v_2}{2} + \frac{v_2 \times v_3}{2} + \frac{v_3 \times v_1}{2} + \frac{(v_3 - v_1) \times (v_2 - v_1)}{2}$$

מסקנה

נתבונן בטטרהדר שפינותיו $0, v_1, v_2, v_3$

נסמן ב u_1, u_2, u_3, u_4 את המאונכים לארבעת הפאות עם אורך שהוא שטח הפאה

טענה: $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$

הסבר: מציור -

$$\begin{aligned}
&u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\
&= \frac{v_1 \times v_2}{2} + \frac{v_2 \times v_3}{2} + \frac{v_3 \times v_1}{2} + \frac{(v_3 - v_1) \times (v_2 - v_1)}{2} \\
&= \frac{v_2 \times v_3}{2} + \frac{v_3 \times v_2}{2} + \frac{v_1 \times v_1}{2} = 0
\end{aligned}$$

מסקנה

נתבונן בטטרהדר שפינותיו $0, v_1, v_2, v_3$

נסמן ב u_1, u_2, u_3, u_4 את המאונכים לארבעת הפאות עם אורך שהוא שטח הפאה

טענה: $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$

הסבר: מציור -

$$
\begin{aligned}
& u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\
& = \frac{v_1 \times v_2}{2} + \frac{v_2 \times v_3}{2} + \frac{v_3 \times v_1}{2} + \frac{(v_3 - v_1) \times (v_2 - v_1)}{2} \\
& = \frac{v_2 \times v_3}{2} + \frac{v_3 \times v_2}{2} + \frac{v_1 \times v_1}{2} = 0
\end{aligned}
$$

מסקנה

נתבונן בפוליטופ במרחב ונסמן $u_1, \ldots, u_k$ את המאונכים לפאותיו עם אורך
שהוא שטח הפאה

טענה: $u_1 + u_2 + \ldots + u_k = 0$

מסקנה

נתבונן בפוליטופ במרחב ונסמן $u_1, \ldots, u_k$ את המאונכים לפאותיו עם אורך שהוא שטח הפאה

טענה: $u_1 + u_2 + \ldots + u_k = 0$

הסבר:

א. אפשר לחלק פוליטופ לטטרההדרים

ב. לכל פאה לא חיצונית יש ביטולים

ג. לדוגמא - פרמידה ריבועית

נפח

נתבונן בטטרהדר שפינותיו $0, v_1, v_2, v_3$

מהו נפחו?

נפח

נתבונן בטטרהדר שפינותיו $0, v_1, v_2, v_3$

מהו נפחו?

תזכורת: נפח = שטח בסיס כפול גובה חלקי שלוש

א. שטח בסיס = $\frac{\|v_1 \times v_2\|}{2}$

ב. גובה = גודל ההיטל של v_3 על מאונך למישור של v_1, v_2 =

$$\frac{\left|\left\langle v_3, v_1 \times v_2 \right\rangle\right|}{\|v_1 \times v_2\|}$$

ג. נפח =

$$\frac{\left|\left\langle v_3, v_1 \times v_2 \right\rangle\right|}{6}$$

קולינאריות

מתי ארבע נקודות v_1, v_2, v_3, v_4 על אותו ישר?

קולינאריות

מתי ארבע נקודות v_1, v_2, v_3, v_4 על אותו ישר?

כשהנפח של המקבילון הוא אפס -

$$\langle (v_4 - v_1), (v_3 - v_1) \times (v_2 - v_1) \rangle = 0$$

מרחק נקודה ממישור

מרחק הראשית מהמישור $ax+by+cz=d$ היא -

א. הנקודה

$$u=\frac{d}{a^2+b^2+c^2}(a,b,c)$$

שייכת למישור

ב. כיוון u מאונך למישור

ג. מרחק המישור מהנקודה הוא

$$\|u\|=\frac{\sqrt{d}}{\|(a,b,c)\|}$$

מרחק נקודה ממישור

מרחק הנקודה (x_0, y_0, z_0) מהמישור $ax + by + cz = d$ שווה ל

מרחק הנקודה $(0,0,0)$ מהמישור $a(x + x_0) + b(y + y_0) + c(z + z_0) = d$
או לחילופין $ax + by + cz = d - ax_0 - by_0 - cz_0$

כלומר

$$\frac{\sqrt{d - ax_0 - by_0 - cz_0}}{\|(a, b, c)\|}$$

דטרמיננטה

אם v_1, v_2 במישור אז נפח מקבילית (עד כדי סימן)

$$det(v_1, v_2) = x_1y_2 - x_2y_1$$

אם v_1, v_2, v_3 במרחב אז נפח מקבילון (עד כדי סימן)

$$\begin{aligned}&\langle v_1, v_2 \times v_3\rangle \\ &= x_1(y_2z_3 - z_3y_2) + y_1(-(x_2z_3 - x_3z_2)) + z_1(x_2y_3 - x_3y_2)\end{aligned}$$

נשים לב, לפי סדר xyz -

$$123 - 132 - 213 + 312 + 231 - 321$$

תמורות...