מבוא להסתברות ח׳

חלק 8

אמיר יהודיוף
הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

עד כה

מרחב הסתברות

משתנים מיקריים

וקטורים אקראיים

שונות משותפת ומקדם מתאם

משתנים גאוסים ותכונותיהם: צפיפות, הטלים, שונות משותפת, חוסר תאום גורר חוסר תלות, התניה

חזאים

לאחר שאספנו מידע, נרצה לדעת מהו הצפי הטוב ביותר לגבי העתיד בהנתן המידע

לשם פשטות, נתחיל ללא מידע: מהו הצפי הטוב ביותר למשתנה מקרי X ?

משמעות המילים "הטוב ביותר" בהקשר זה:
מהו המספר $a \in \mathbb{R}$ עבורו $\mathbb{E}((X-a)^2)$ קטן ביותר?

התוחלת: נתבונן בפונקציה $h(a) = \mathbb{E}((X-a)^2)$ ונחשב

$$h'(a) = \mathbb{E}(-2)(X-a) \quad , \quad h''(a) = 2$$

ולכן הנקודה $a = \mathbb{E}(X)$ היא מינימום של h

חזאים

לאחר שאספנו מידע, נרצה לדעת מהו הצפי הטוב ביותר לגבי העתיד בהנתן המידע

נאמר שאספנו מידע המתומצת על ידי המשתנה המקרי Y

מהו המספר $a \in \mathbb{R}$ עבורו $\mathbb{E}((X-a)^2|Y)$ קטן ביותר?

הגדרה: החזאי הכללי של X בהנתן Y הוא

$$\widehat{X} = \mathbb{E}[X|Y]$$

דוגמא: אם $Y \sim U([1,e])$ ו $X \sim Exp(Y)$ מתקיים

$$\widehat{X} = \frac{1}{Y}$$

חזאי ליניארי

לפעמים נרצה שהחזאי יהיה פונקציה ליניארית של Y

מהם $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם $h(a,b) = \mathbb{E}((X - (aY + b))^2)$ מינימליי?

חזאי ליניארי

לשם פשטות נסמן $X' = X - \mathbb{E}(X)$ ו $Y' = Y - \mathbb{E}(Y)$

נחפש a', b' עבורם $h'(a,b) = \mathbb{E}((X' - (aY' + b))^2)$ מינימלי

$$\frac{\partial}{\partial a} h' = 2\mathbb{E}((X' - aY' - b)(-Y')) = 2a\mathbb{E}(Y'^2) - 2\mathbb{E}(X'Y')$$

$$\frac{\partial}{\partial b} h' = (-2)\mathbb{E}(X' - aY' - b) = 2b$$

$$H_{h'} = \begin{bmatrix} 2\mathbb{E}(Y'^2) & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

כלומר $a' = \frac{cov(X', Y')}{\mathbb{E}(Y'^2)}$ ו $b' = 0$ הם מינימום של h'

חזאי ליניארי

נשים לב

$$\mathbb{E}((X' - (a'Y' + b'))^2)$$
$$= \mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}(X) - \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))}{\mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y))^2}(Y - \mathbb{E}(Y)) - 0\right)^2$$
$$= \mathbb{E}\left(X - aY - b\right)^2$$

עבור

$$a = \frac{cov(X, Y)}{\mathbb{V}(Y)} \quad , \quad b = \mathbb{E}(X) - \frac{cov(X, Y)}{\mathbb{V}(Y)}\mathbb{E}(Y)$$

חזאי ליניארי

מהם $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם $h(a, b) = \mathbb{E}((X - (aY + b))^2)$ מינימליי?

תשובה:

$$a = \frac{cov(X, Y)}{\mathbb{V}(Y)} \quad , \quad b = \mathbb{E}(X) - \frac{cov(X, Y)}{\mathbb{V}(Y)}\mathbb{E}(Y)$$

הגדרה: החזאי הליניארי של X בהנתן Y הוא

$$\widehat{X}_L = \mathbb{E}(X) + \frac{cov(X, Y)}{\mathbb{V}(Y)}(Y - \mathbb{E}(Y))$$

הסבר:

- $\mathbb{E}(X)$ היא גורם מסדר אפס והשאר מסדר ראשון
- $\frac{cov(X,Y)}{\mathbb{V}(Y)}$ מתאר את הקשר הליניארי בין X ל Y
- $Y - \mathbb{E}(Y)$ זהו נרמול על מנת שתוחלת תהיה אפס

דוגמא

יהיו $Y \sim U([1,e])$ ו $X \sim Exp(Y)$

מהו החזאי הליניארי של X בהנתן Y ? נחשב:

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1+e}{2}\,, \quad \mathbb{V}(Y) = \frac{(e-1)^2}{12}$$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{e-1}\frac{1}{Y}\right) = \int_1^e \frac{1}{e-1}\frac{1}{y}dy = \frac{1}{e-1}$$

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(Y\,\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}\left(Y \cdot \frac{1}{Y}\right) = 1$$

$$\frac{cov(X,Y)}{\mathbb{V}(Y)} = \frac{1 - \frac{1}{e-1}\frac{1+e}{2}}{\frac{(e-1)^2}{12}} = \frac{6(2(e-1)-1-e)}{(e-1)^3} = \frac{6(e-3)}{(e-1)^3}$$

נציב:

$$\widehat{X}_L = \frac{1}{e-1} + \frac{6(e-3)}{(e-1)^3}\left(Y - \frac{1+e}{2}\right)$$

דוגמא

יהיו $Y \sim U([1,e])$ ו $X \sim Exp(Y)$

החזאי הליניארי של X בהנתן Y הוא

$$\widehat{X}_L = \frac{1}{e-1} + \frac{6(e-3)}{(e-1)^3}\left(Y - \frac{1+e}{2}\right)$$

הערות:

- החזאי הטוב ביותר במקרה זה הוא $1/Y$ ולכן החזאי הליניארי הוא אחר
- אם החזאי הכללי הוא ליניארי אז הוא החזאי הליניארי
- ראינו שחזאי כללי עבור וקטורים גאוסים הוא ליניארי

דוגמא נוספת

יהיו $Y \sim N(0,1)$ ו $X = Y^2 - 1$ אז
החזאי הכללי של X בהנתן Y הוא

$$\widehat{X} = \mathbb{E}(X|Y) = Y^2 - 1$$

אבל

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y^2 - 1) = 0, \;\; \mathbb{E}(Y) = 0, \;\; \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(Y^3 - Y) = 0$$

ולכן החזאי הליניארי של X בהנתן Y הוא

$$\widehat{X}_L = 0$$

הם בלתי מתואמים אבל לא בלתי תלויים

סיכום ביניים

מרחב הסתברות

משתנים מיקריים

וקטורים אקראיים

שונות משותפת ומקדם מתאם

משתנים גאוסים ותכונותיהם

חזאים: נקודת מבט שונה על תוחלת, חזאי אופטימלי וחזאי ליניארי

חוק המספרים הגדולים

דוגמא: כאשר זורקים קוביה הוגנת תוחלת התוצאה היא 3.5 והסיכוי לקבל ערך זה הוא אפס. אולם אם זורקים 1000 קוביות הסיכוי שסך התוצאות יסטה מ 3500 הוא קטן.

תופעה זו התחילה להחקר במאה ה 16 באיטליה (קרדנו) והדיון הפך פורמלי במאה ה 19 על ידי ברנולי שהיה דוד של הפיסיקאי.

חוק המספרים הגדולים

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ סדרה של משתנים מקריים *i.i.d.* כלומר בלתי תלויים שווי התפלגות (*independent identically distributed*) עם תוחלת μ ושונות σ^2 סופיות

לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $S_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$

מה תוחלת S_n ?

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} \mathbb{E}(X_i) = \mu$$

מה שונות S_n ?

$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{i\in[n]} \mathbb{V}(X_i/n) = \sigma^2/n$$

משפט (החוק החלש של המספרים הגדולים): לכל $\epsilon > 0$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n - \mu| \geq \epsilon) = 0$$

חוק המספרים הגדולים

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ סדרה של משתנים מקריים *i.i.d.* עם תוחלת μ ושונות σ^2 סופיות
ונגדיר $S_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$

אז $\mathbb{E}(S_n) = \mu$ ו $\mathbb{V}(S_n) = \sigma^2/n$

משפט (החוק החלש של המספרים הגדולים): לכל $\epsilon > 0$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n - \mu| \geq \epsilon) = 0$$

הוכחה: אי שיוויון צ׳בישב אומר שלכל n מתקיים

$$\mathbb{P}(|S_n - \mu| \geq \epsilon) = \mathbb{P}\left(|S_n - \mu| \geq \epsilon\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n}$$

חוק המספרים הגדולים

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ סדרה של משתנים מקריים $i.i.d.$ עם תוחלת μ ושונות σ^2 סופיות
ונגדיר $S_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$

משפט (החוק החלש של המספרים הגדולים): לכל $0 < \epsilon$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|S_n - \mu| \geq \epsilon) = 0$$

הערות:

א. הוכחה מתארת קצב שאיפה לאפס

ב. הוכחה מראה שמספיק להניח שהמשתנים המיקריים בלתי מתואמים בזוגות (הרבה פחות מוגבל מבלתי תלויים)

שימושים

א. מדידת גדלים: בהרבה מקרים נתעניין בערך μ כלשהו (טמפרטורה, אחוז תמיכה,...) וכל בדיקה שנעשה תחזיר X שרק מקרב את μ. אם נחזור על מדידות הרבה פעמים נקבל הערכה טובה יותר ויותר של μ.

הערה: בהרבה מקרים, כמויות פיסיקליות למשל הן בהגדרתן תוחלת של משתנה מקרי (טמפרטורה, אנתרופיה,...)

ב. הערכת סיכויים: אם נרצה להעריך הסתברות של מאורע A נוכל לבצע כמה ניסויים, לבדוק בכמה מהם A התרחש, ולקרב את הסתברותו

הערה: ישנו גם החוק החזק של המספרים הגדולים שמדבר על התכנסות חזקה יותר של S_n ל μ

דוגמא

נניח כי ישנן 2 קבוצות כדורגל שבועטות פנדלים:
קבוצה א מבקיעה גול בסיכוי $3/4$
קבוצה ב מבקיעה גול בסיכוי $2/3$

יהי A_n המאורע שקבוצה א נצחה אחרי n בעיטות (בלתי תלויות). מהו $\mathbb{P}(A_n)$?

טענה: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$

דוגמא

קבוצה א מבקיעה גול בסיכוי $3/4$ וקבוצה ב בסיכוי $2/3$

יהי A_n המאורע שקבוצה א נצחה אחרי n בעיטות (בלתי תלויות). מהו $\mathbb{P}(A_n)$?

טענה: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$

הוכחה: נגדיר משתנה מקרי $X_i \in \{-1, 0, 1\}$ המייצג את תוצאת הסיבוב ה i
למשל $X_i = 1$ אומר שקבוצה א הבקיעה וקבוצה ב לא.
אז

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

ולכן

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} X_i > 0\right) \geq \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} X_i - \frac{1}{12}\right| < \frac{1}{12}\right)$$
$$= 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i\in[n]} X_i - \frac{1}{12}\right| \geq \frac{1}{12}\right)$$

דוגמא

קבוצה א מבקיעה גול בסיכוי $3/4$ וקבוצה ב בסיכוי $2/3$

יהי A_n המאורע שקבוצה א נצחה אחרי n בעיטות (בלתי תלויות). מהו $\mathbb{P}(A_n)$?

טענה: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$

הערה: הטענה נובעת מהחוק החלש של המספרים הגדולים, אבל לא מונעת את האפשרות שקבוצה ב מנצחת אינסוף פעמים. מהחוק החזק נובעת הטענה היותר חזקה: הסיכוי שקבוצה ב מנצחת אינסוף פעמים הוא אפס.

סיכום ביניים

מרחב הסתברות

משתנים מיקריים, וקטורים אקראיים

חזאים

החוק החלש של המספרים הגדולים: אם עורכים מספיק ניסויים, סיכוי קטן שממוצע יסטה מתוחלת

משפט הגבול המרכזי

האוניברסליות של ההתפלגות הנורמלית

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ משתנים מיקריים *i.i.d.* עם תוחלת μ ושונות σ^2
ונגדיר לכל n טבעי

$$Z_n = \frac{(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}$$

סכום מנורמל כך ש $\mathbb{E}(Z_n) = 0$ ו $\mathbb{V}(Z_n) = 1$

משפט (הגבול המרכזי): לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \le \alpha) = \Phi(\alpha)$$

כאשר Φ היא פונקצית ההתפלגות של משתנה נורמלי תקני

הוכחה חלקית

תזכורת: נראה כי $Z_n = \frac{(X_1+X_2+\ldots+X_n)-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}$ שואף לנורמלי תקני

רעיון ההוכחה:

א. נראה כי פונקציה אופיינית של Z_n שואפת לזו של נורמלי תקני

ב. מכיוון שפונקציה אופיינית מתארת התפלגות (טרנספורם פורייה) נוכל להסיק שהתפלגויות מתכנסות

פונקציות אופייניות

תזכורת: פונקציה אופיינית של נורמלי תקני $X \sim N(0,1)$ היא $\mathbb{E}(e^{itX}) = e^{-t^2}$

נרצה לחשב פונקציה אופיינית של Z_n ולשם כך נגדיר לכל j טבעי

$$Y_j = \frac{X_j - \mu}{\sigma}$$

מתקיים

$$\sum_{j \in [n]} Y_j = \frac{1}{\sigma}((X_1 + \ldots + X_n) - \mu n) = \sqrt{n} Z_n$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{itZ_n}) &= \mathbb{E}(e^{\sum_{j \in [n]} Y_j (t/\sqrt{n})}) = \mathbb{E}(e^{Y_1(t/\sqrt{n})} e^{Y_2(t/\sqrt{n})} \cdots e^{Y_n(t/\sqrt{n})}) \\
&\underset{indep.}{=} \mathbb{E}(e^{Y_1(t/\sqrt{n})}) \mathbb{E}(e^{Y_2(t/\sqrt{n})}) \cdots \mathbb{E}(e^{Y_n(t/\sqrt{n})}) \\
&= \left(\mathbb{E}(e^{Y_1(t/\sqrt{n})})\right)^n
\end{aligned}$$

פונקציות מאפיינות

נרצה לחשב פונקציה אופיינית של Z_n, נגדיר $Y_j = \frac{X_j - \mu}{\sigma}$ ומתקיים $\sum_{j \in [n]} Y_j = \sqrt{n} Z_n$

ולכן

$$\mathbb{E}(e^{itZ_n}) = \left(\mathbb{E}(e^{Y_1(t/\sqrt{n})}) \right)^n$$

על מנת להבין טוב יותר, נקרב:

$$\mathbb{E}(e^{Y_1(t/\sqrt{n})}) = \mathbb{E}\left(1 + i\frac{t}{\sqrt{n}} Y_1 - \frac{t^2}{n} {Y_1}^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

כאשר $o(1/n)$ זו פונקציה ששואפת מהר יותר לאפס מ $1/n$

ליניאריות התוחלת אומרת ש

$$\mathbb{E}(e^{Y_1(t/\sqrt{n})}) = 1 + 0 - \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

פונקציות אופייניות

נרצה לחשב פונקציה אופיינית Z_n, נגדיר $Y_j = \frac{X_j - \mu}{\sigma}$ ומתקיים $\sum_{j\in[n]} Y_j = \sqrt{n} Z_n$

ולכן

$$\mathbb{E}(e^{itZ_n}) = \left(1 - \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

ניקח גבול

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(e^{itZ_n}) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{n/t^2}\right)^{t^2} = e^{-t^2}$$

במילים: הראנו שפונקציה אופיינית של Z_n שואפת לזו של נורמלי תקני

על מנת להשלים הוכחה נשתמש במשפט רציפות של לוי:

אם $\mathbb{E}(e^{itX}) \to \mathbb{E}(e^{itZ_n})$ לכל $t \in \mathbb{R}$ אז $F_X(\alpha) \to F_{Z_n}(\alpha)$ לכל $\alpha \in \mathbb{R}$

משפט הגבול המרכזי

האוניברסליות של ההתפלגות הנורמלית

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ משתנים מיקריים *i.i.d.* עם תוחלת μ ושונות σ^2
ונגדיר $Z_n = \frac{(X_1+X_2+\ldots+X_n)-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}$ סכום מנורמל כך ש $\mathbb{E}(Z_n) = 0$ ו $\mathbb{V}(Z_n) = 1$

משפט (הגבול המרכזי): לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq \alpha) = \Phi(\alpha)$$

רעיון ההוכחה:

א. פונקציה אופיינית של Z_n שואפת לזו של נורמלי תקני (פונקציה אופיינית של סכום של משתנים בלתי תלויים היא מכפלת הפונקציות)

ב. פונקציה אופיינית מתארת התפלגות

דוגמאות

א. מטילים קוביה הוגנת $n = 420$ פעמים. העריכו את הסיכוי שממוצע תוצאות ההטלות יהיה בין 3.4 ל 3.6 .

לכל $i \in [n]$ נסמן ב Y_i את תוצאת ההטלה ה i

תזכורת: לכל $i \in [n]$ מתקיים $\mathbb{E}(Y_i) = \mu = 7/2$ ו $\mathbb{V}(Y_i) = \sigma^2 = 35/12$

נגדיר $Z = \sum_{i \in [n]} Y_i$ ונשים לב

$$3.4 \leq Z/n \leq 3.6 \quad \Leftrightarrow \quad |Z/n - \mu| \leq 0.1 \quad \Leftrightarrow \quad |Z - \mu n| \leq 0.1n$$
$$\Leftrightarrow \quad \left| \frac{Z - \mu n}{\sigma \sqrt{n}} \right| \leq 0.1 \frac{\sqrt{n}}{\sigma} = 1.2$$

ממשפט הגבול המרכזי אנו יודעים

$$\mathbb{P}(3.4 \leq Z/n \leq 3.6) \approx \mathbb{P}(|X| \leq 1.2) = \Phi(1.2) - (1 - \Phi(1.2)) \approx 0.77$$

עבור $X \sim N(0, 1)$

דוגמאות

ב. מטילים קוביה הוגנת עד שסכום תוצאות הוא לפחות 350 . העריכו סיכוי שדרושות יותר מ $n = 105$ הטלות.

כמו קודם, נסמן ב Y_i את תוצאת ההטלה ה i ונגדיר $Z = \sum_{i \in [n]} Y_i$

אנו מתעניינים ב $\mathbb{P}(Z < 350)$ וכמו קודם

$$Z < 350 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Z - \mu n}{\sigma \sqrt{n}} < \frac{350 - \mu n}{\sigma \sqrt{n}} = -1$$

ולכן

$$\mathbb{P}(Z < 350) \approx \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 0.16$$

דוגמאות

ג. מטילים מטבע הוגן $n = 100$ פעמים. מה הסיכוי שכל תוצאה (עץ,פלי) יצאה לפחות 45 פעמים?

נסמן ב Z את מספר הפעמים שיצא פלי.

בדיוק:

$$\mathbb{P}(45 \leq Z \leq 55) = \sum_{k=45}^{55} \binom{100}{k} 2^{-100}$$

אמנם חישוב מדויק, אבל כמה זה?

נעריך:

$$\mathbb{P}(45 \leq Z \leq 55) = \mathbb{P}\left(-1 \leq \frac{Z - n/2}{(1/2)\sqrt{n}} \leq 1\right)$$
$$\approx \mathbb{P}_{X \sim N(0,1)}(-1 \leq X \leq 1) \approx 0.68$$

דוגמאות

ד. הילוך מקרי: שיכור חד-מימדי מתחיל ללכת בראשית ובכל צעד נופל ימינה בסיכוי חצי ושמאלה בסיכוי חצי

יהיו $Y_1, Y_2, \ldots$ משתנים מקריים $i.i.d.$ המתארים את צעדי השיכור: בסיכוי חצי 1 ובסיכוי חצי מינוס 1

מיקום השיכור אחרי t צעדים $Z_t = \sum_{i \in [t]} Y_i$

משפט הגבול המרכזי אומר ש

$\lim_{t\to\infty}(-3\sqrt{t} \le M_t \le 3\sqrt{t}) = \Phi(3) - (1 - \Phi(3)) \approx 0.9974$

הערות:

א. נשים לב שבאופן פוטנציאלי $-t \le M_t \le t$. למשל עבור $t = 10,000$ הקטע $[-300, 300]$ מהווה רק 3 אחוז מהקטע $[-t, t]$ אבל סיכוי ששיכור בו מאוד גבוה

ב. אי-שיוויון צ׳בישב רק אומר שסיכוי זה הוא לפחות $8/9$

דוגמאות

ה. הוכיחו:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+n+\frac{n^2}{2}+\ldots+\frac{n^n}{n!}}{e^n} = \frac{1}{2}$$

פתרון: נשים לב שביטוי בצד שמאל הוא $\mathbb{P}(X \le n)$ עבור $X \sim Pois(n)$

נזכר שניתן לכתוב X כסכום $X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$ עבור $Y_1, Y_2, \ldots$ משתנים $i.i.d.$ המתפלגים $Pois(1)$ (תוחלת ושונות הן אחד)

לכן

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \le n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X-n}{\sqrt{n}} \le 0\right) = \Phi(0)$$

סיכום ביניים

מרחב הסתברות

משתנים מיקריים, וקטורים אקראיים

חזאים

החוק החלש של המספרים הגדולים

משפט הגבול המרכזי: ממוצע של משתנים בלתי תלויים הוא קרוב לנורמלי

פונקציות הרמוניות

ישנם מקרים בהם רוצים להבין התנהגות מערכת המתוארת על ידי משוואה דיפרנציאלית בהנתן תנאי שפה

דוגמא הסתברותית: מהמר מתחיל עם n שקלים, בכל סיבוב מהמר על שקל וסיכוי לזכות הוא חצי. מה סיכוי להגיע ל $10n$ שקלים לפני שיגמר הכסף?

לכל $0 \leq n \leq k$ נגדיר $h_k(n)$ כסיכוי להגיע ל k שקלים לפני שמפסידים כל כסף, כשמתחילים מ n שקלים.

תנאי שפה: $h_k(0) = 0$ ו $h_k(k) = 1$

משוואה: לכל $0 < n < k$ מתקיים $h_k(n) = \frac{1}{2}h_k(n-1) + \frac{1}{2}h_k(n+1)$

פתרון: אלו $k-1$ משוואות ליניאריות ב $k-1$ נעלמים ויש להן פתרון יחיד שהוא

$$h_k(n) = \frac{n}{k}$$

תשובה לשאלה: עשירית