מבוא להסתברות ח׳

חלק 7

אמיר יהודיוף
הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

עד כה

מרחב הסתברות

משתנים מיקריים: תוחלת, שונות, קמירות, מומנטים, פונקציה יוצרת ופונקציה אופיינית

וקטורים אקראיים: בדידים, רציפים, התפלגות, תלות וחוסר תלות, תוחלת של מכפלה, התניה, תוחלת מותנת ונוסחת החלקה

פונקציה של וקטור אקראי

יהי $X = (X_1, \ldots, X_k)$ וקטור אקראי ותהי $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ כך ש $Z = h(X)$ הוא משתנה מקרי

מתקיימות נוסחאות דומות לתוחלות:

במקרה בדיד:

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{a \in \mathbb{R}^k} P(X = a) h(a)$$

ובמקרה רציף בהחלט:

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{a \in \mathbb{R}^k} f_X(a) h(a) \, da$$

דוגמאות

א. יהי X אקראי ב $[0,1]^2$ עם צפיפות

$$f_X(a,b) = \begin{cases} \frac{3}{2}(a^2+b^2) & (a,b) \in [0,1]^2 \\ 0 & (a,b) \notin [0,1]^2 \end{cases}$$

ויהי Z שטח המלבן שמוגדר על ידי X והראשית (עם צלעות מקבילות לצירים)

מהי $\mathbb{E}(Z)$?

נחשב:

$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{3}{2}(a^2+b^2) \cdot ab \, dadb = \frac{3}{8}$$

דוגמאות

ב. יהי X אקראי אחיד ב $[0,1]^2$ ויהי Z שטח המלבן שמוגדר על ידי X והראשית (עם צלעות מקבילות לצירים)

מהי $\mathbb{E}(Z)$?

נשים לב: $Z = X_1 \cdot X_2$ ובמקרה זה X_1, X_2 בלתי תלויים ולכן

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

סכום של משתנים מיקריים

בהנתן משתנים מיקריים X, Y נתבונן בסכום $Z = X + Y$

ראינו $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ אבל מה לגבי תכונות אחרות של Z ?

בדיד: $\mathbb{P}(Z = c) = \sum_a \mathbb{P}(X = a, Y = c - a)$

רציף: $f_Z(c) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(a, c-a)\, da$

ואם X, Y בלתי תלויים

בדיד: $\mathbb{P}(Z = c) = \sum_a \mathbb{P}(X = a)\mathbb{P}(Y = c - a)$

רציף: $f_Z(c) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a) f_Y(c-a)\, da$

אלה הן קונבולוציות. נסמן $P_Z = P_X * P_Y$ ו $f_Z = f_X * f_Y$

דוגמאות

א. סכום של בינומים הוא בינומי: אם $X \sim B(n, p)$ ו $Y \sim B(m, p)$ בלתי תלויים אז $X + Y \sim B(n + m, p)$

דוגמאות

ב. סכום של גיאומטרים הוא בינומי שלילי: יהיו $X, Y \sim Geom(p)$ בלתי תלויים. מהו $Z = X + Y$?

זמן עד הצלחה שניה בסדרת ניסויים, כלומר משתנה בינומי שלילי

באופן כללי, אם $X_1, \ldots, X_r \sim Geom(p)$ בלתי תלויים אז לכל k טבעי

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_r = k) \\
&\quad = \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots+a_r=k \\ a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{N}}} \mathbb{P}(X_1 = a_1)\mathbb{P}(X_2 = a_2) \cdots \mathbb{P}(X_r = a_r) \\
&\quad = \sum_{\substack{a_1+a_2+\ldots+a_r=k \\ a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{N}}} (1-p)^{a_1-1} p (1-p)^{a_2-1} p \cdots (1-p)^{a_r-1} p \\
&\quad = (1-p)^{k-r} p^r \binom{k+r-1}{r-1}
\end{aligned}$$

דוגמאות

ג. סכום של פואסונים הוא פואסוני: $X \sim Pois(\lambda_1)$ ו $Y \sim Pois(\lambda_2)$ בלתי תלויים אז $X + Y \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$

דוגמאות

ד. סכום של מעריכים הוא גאמה: אם $X, Y \sim Exp(\lambda)$ בלתי תלויים אז לכל $c \geq 0$

$$f_{X+Y}(c) = \int_0^c f_X(a) f_Y(c-a)\ da = \int_0^c \lambda e^{-\lambda a} \lambda e^{-\lambda(c-a)} da$$
$$= \lambda^2 e^{-\lambda c} \int_0^c\ da = \lambda^2 e^{-\lambda c} c$$

אם $X_1, \ldots, X_r \sim Exp(\lambda)$ בלתי תלויים אז $Z = X_1 + \ldots + X_r \sim \Gamma(r, \lambda)$ ומתקיים לכל $c \geq 0$

$$f_Z(c) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} c^{r-1} e^{-\lambda c}$$

דוגמאות

ה. סכום של נורמלים הוא נורמלי: יהיו $X, Y \sim N(0,1)$ בלתי תלויים אז

$$
\begin{aligned}
f_{X+Y}(c) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(c-a)^2/2}\, da \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(c^2/2-ac+a^2)}\, da = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(c/2-a)^2-c^2/4}\, da \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-c^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(c/2-a)^2}\, da = \frac{1}{2\pi} e^{-c^2/4} \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-c^2/4}
\end{aligned}
$$

כלומר $X+Y \sim N(0,2)$

באופן כללי אם $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ו $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ בלתי תלויים אז

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

דוגמאות

ו. אין נוסחאות "פשוטות" לסכום של שני משתנים מיקריים כלליים

פונקציה וקטורית

יהי $X \sim U(D)$ רציף בהחלט עבור תחום $D \subset \mathbb{R}^2$

תהי $T : D \to \tilde{D}$ עם פונקציה הופכית גזירה ברציפות עבור תחום $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$

מה ניתן לומר על $T(X)$?

טענה: לכל $y \in \tilde{D}$ מתקיים

$$f_{T(X)}(y) = J_{T^{-1}}(y) \cdot f_X(T^{-1}(y))$$

כאשר J הוא היעקוביאן: עבור $h = (h_1, h_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ מתקיים

$$J_h = \left| det \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} \right|$$

דוגמא

יהי X מתפלג ב $[0,1]^2$ עם צפיפות $f_X(a)=\frac{3}{2}(a_1^2+a_2^2)$

תהי $T=\left[\begin{array}{cc}1 & 1\\ 1 & -1\end{array}\right]$ ונגדיר $\tilde{D}=T(D)$ (ציור)

נחשב: $T^{-1}=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc}1 & 1\\ 1 & -1\end{array}\right]$ תזכורת: $\left[\begin{array}{cc}a & b\\ c & d\end{array}\right]^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\left[\begin{array}{cc}d & -b\\ -c & a\end{array}\right]$

כלומר $T^{-1}(y)=((y_1+y_2)/2,(y_1-y_2)/2)$ ולכן

$$J_{T^{-1}}(y)=\left|det\left[\begin{array}{cc}1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{array}\right]\right|=1/2$$

ולבסוף

$$f_{T(X)}(y)=\frac{1}{2}f_X(T^{-1}(y))=\frac{1}{2}\frac{3}{2}\left(\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2\right)=\frac{3}{8}(y_1^2+y_2^2)$$

סיכום ביניים

מרחב הסתברות

משתנים מיקריים: תוחלת, שונות, קמירות, מומנטים, פונקציה יוצרת ופונקציה אופיינית

וקטורים אקראיים: בדידים, רציפים, התפלגות, תלות וחוסר תלות, תוחלת של מכפלה, התניה, תוחלת מותנת ונוסחת החלקה

קונבולוציות

פונקציות וקטוריות

שונות משותפת

נרצה לכמת קשר בין שני משתנים מיקריים. ישנן הרבה דרכים לעשות כן. אחת מהן:

הגדרה: יהיו X, Y משתנים מיקריים עם תוחלת ושונות סופיים. נגדיר את השונות המשותפת כ

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)\Big)$$

דוגמאות:

$$cov(X, X) = \mathbb{V}(X)$$
$$cov(X, -X) = -\mathbb{V}(X)$$

באופן אינטואיטיבי: אם גדול מתואמים, אם קרוב לאפס לא מתואמים, ואם מאוד שלילי מתואמים שלילית

הגדרה: X, Y בלתי מתואמים אם $cov(X, Y) = 0$

נוסחא נוספת

ראינו שני ביטויים לשונות: $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

טענה (ביטוי נוסף לשונות משותפת): לכל X, Y עם תוחלת ושונות סופיים מתקיים

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

הוכחה: נשתמש בליניאריות התוחלת

$$\begin{aligned} cov(X, Y) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) \\ &= \mathbb{E}(XY) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

דוגמאות

א. יהי X תוצאת הטלת קוביה הוגנת ויהי
$$Y = \begin{cases} 1 & X \in \{3,4\} \\ 0 & X \in \{1,2,5,6\} \end{cases}$$

מהי $cov(X,Y)$?

נחשב:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{E}(Y|X) = \begin{cases} 1 & X \in \{3,4\} \\ 0 & X \in \{1,2,5,6\} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|X)) = \mathbb{E}(X\,\mathbb{E}(Y|X)) = \frac{1}{6}(3+4) = \frac{7}{6}$$

כלומר $cov(X,Y) = \frac{7}{6} - \frac{7}{2}\frac{1}{3} = 0$

הערה: X, Y אינם בלתי תלויים

דוגמאות

ב. (X, Y) אחיד במשולש $D = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a, b \geq 0,\ a + b \leq 1\}$

לכן

$$f_{X,Y}(a, b) = \begin{cases} 2 & (a, b) \in D \\ 0 & (a, b) \notin D \end{cases}$$

ולכן

$$f_X(a) = \int_0^{1-a} 2\, dy = 2(1 - a)$$

ולכן

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 2(1 - a)a\, da = \frac{1}{3},\ \ \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{6}$$

ובנוסף

$$\mathbb{E}(X|Y = b) = \int_0^{1-b} \frac{2}{2(1 - b)} a\, da = \frac{1 - b}{2}$$

דוגמאות

ב. (X,Y) אחיד במשולש $D=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 : a,b\geq 0,\ a+b\leq 1\}$

חישבנו:

$$\mathbb{E}(X)=\int_0^1 2(1-a)a\,da=\frac{1}{3},\ \ \mathbb{E}(X^2)=\frac{1}{6}$$

ו

$$\mathbb{E}(X|Y=b)=\int_0^{1-b}\frac{2}{2(1-b)}a\,da=\frac{1-b}{2}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY)&=\mathbb{E}(Y\,\mathbb{E}(X|Y))=\mathbb{E}(Y(1-Y)/2)\\&=\mathbb{E}(Y)/2-\mathbb{E}(Y^2)/2=1/6-1/12=1/12\end{aligned}$$

ולסיכום $cov(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)=1/12-(1/3)^2=-1/36$

במילים: אם X גדול אז Y קטן ולהיפך

תכונות

תזכורת $cov(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

טענה: לכל X,Y,Z עם תוחלת ושונות סופיים מתקיים

א. $cov(X,X)=\mathbb{V}(X)\geq 0$

ב. $cov(X,Y)=cov(Y,X)$

ג. $cov(aX,Y)=a\,cov(X,Y)$ לכל $a\in\mathbb{R}$

ד. $cov(X+b,Y)=cov(X,Y)$ לכל $b\in\mathbb{R}$

ה. $cov(X+Z,Y)=cov(X,Y)+cov(Z,Y)$

במילים אחרות: שונות משותפת מגדירה "מכפלה פנימית" בין משתנים מקריים

מקדם מתאם

יש בעיית נרמול (למשל מה ניתן ללמוד מ $cov(X,Y)=1$) ולכן ננרמל:

הגדרה: יהיו X,Y משתנים מיקריים עם תוחלת סופית ושונות שונה מאפס. נגדיר את מקדם המתאם כ

$$\rho_{X,Y}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$$

תכונות

תזכורת $\rho_{X,Y} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$

טענה: לכל X, Y עם תוחלת ושונות סופיים (שונות שונה מאפס) מתקיים

א. $\rho_{X,X} = 1$ וגם $\rho_{X,Y} = \rho_{Y,X}$

ב. $\rho_{-X,Y} = -\rho_{X,Y}$

ג. $\rho_{aX,Y} = \rho_{X,Y}$ לכל $a > 0$

ד. $\rho_{X+b,Y} = \rho_{X,Y}$ לכל $b \in \mathbb{R}$

ה. $|\rho_{X,Y}| \leq 1$

ו. $\rho_{X,Y} = 1$ אם ורק אם $Y = aX + b$ עבור $a > 0, b$ ממשיים

הסבר (ה,ו): אי שיוויון קושי-שוורץ

מימדים גבוהים

הגדרה: מטריצת השונות המשותפת (קו-וריאנס) $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ של המשתנים המיקריים $X_1, \ldots, X_n$ מוגדרת כך: לכל $i, j \in [n]$ מתקיים

$$\Sigma_{i,j} = cov(X_i, X_j)$$

מטריצה זו בגודל $n \times n$ והיא מסכמת מידע לגבי מתאמים בין הזוגות של המשתנים המיקריים

אבחנה: זוהי מטריצה סימטרית $\Sigma_{i,j} = \Sigma_{j,i}$

כל צירוף ליניארי

מטריצת השונות המשותפת של $X = (X_1, \ldots, X_n)$ היא $\Sigma_{i,j} = cov(X_i, X_j)$

מטריצה זו מכילה מידע לגבי כל צירוף לינארי: לכל $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ ו $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$cov\left(\sum_{i\in[n]} \alpha_i X_i, \sum_{j\in[n]} \beta_j X_j\right) = \sum_{i,j\in[n]} \alpha_i \beta_j cov\left(X_i, X_j\right) = \sum_{i,j\in[n]} \alpha_i \beta_j \Sigma_{i,j}$$

ובסימון מטריציוני

$$cov(\alpha^T X, \beta^T X) = \alpha^T \Sigma \beta$$

כאשר וקטורים הם וקטורי עמודה ו M^T זו טרנפוזיציה $(M^T)_{i,j} = M_{j,i}$

דוגמא

תהי $\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ מטריצת הקו-וריאנס של X_1, X_2

מהי השונות של $X_1 + 2X_2$?

$$\mathbb{V}(X_1 + 2X_2) = cov(X_1 + 2X_2, X_1 + 2X_2) = (1,2)\Sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$$

סיכום ביניים

מרחב הסתברות

משתנים מיקריים: תוחלת, שונות, קמירות, מומנטים, פונקציה יוצרת ופונקציה אופיינית

וקטורים אקראיים: בדידים, רציפים, התפלגות, תלות וחוסר תלות, תוחלת של מכפלה, התניה, תוחלת מותנת ונוסחת החלקה, קונבולוציות, פונקציות וקטוריות

שונות משותפת ומקדם מתאם: מעידים על תלות ליניארית בין משתנים מיקריים

מטריצות סימטריות

תזכורת: תהי $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית אז

א. M מגדירה תבנית ריבועית Q_M: עבור וקטור של משתנים $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ מתקיים

$$Q_M(\xi) = \xi^T M \xi = \sum_{i,j\in[n]} \xi_i \xi_j M_{i,j}$$

(זהו פולינום מדרגה שניה)

למשל

$$Q_{\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{array}\right]}(\xi_1, \xi_2) = 1\xi_1\xi_1 + 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_2\xi_1 + (-1)\xi_2\xi_2$$

$$= \xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 - \xi_2^2$$

מטריצות סימטריות

תזכורת: תהי $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית אז

ב. למטריצה M יש n וקטורים עצמיים $v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n$ וערכים עצמיים $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$: לכל $i \in [n]$ מתקיים

$$Mv_i = \lambda_i v_i$$

בנוסף הוקטורים העצמיים אורתונורמלים: אם $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ היא המטריצה שהעמודה ה i בה היא v_i אז V אורתוגונלית, כלומר

$$V^T V = I$$

כאשר I זו מטריצת היחידה

במילים אחרות, עד כדי שינוי בסיס M היא מטריצה אלכסונית: אם D היא המטריצה האלכסונית המקיימת $D_{i,i} = \lambda_i$ אז

$$V^{-1} A V = D$$

מטריצות סמטריות

תזכורת: תהי $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה סימטרית אז

ג. הגדרה: המטריצה M נקראת מוגדרת חיובית אם כל ערכיה העצמיים חיוביים.

משפט: התנאים הבאים שקולים:
- M מוגדרת חיובית.
- המטריצה M^{-1} קיימת והיא גם מוגדרת חיובית.
- לכל $\xi \in \mathbb{R}^n$ שאינו אפס מתקיים $Q_M(\xi) > 0$.
- לכל $i \in [n]$ מתקיים ש $det(M_i) > 0$ כאשר $M_i \in \mathbb{R}^{i \times i}$ זו המטריצה המורכבת מ i השורות והעמודות הראשונות ב M .

למשל

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

התפלגות גאוסית

הכללה של התפלגות נורמלית למימדים גבוהים יותר

דוגמא:

1 יהיו $X_1, X_2 \sim N(0,1)$ בלתי תלוים (עיגול)

$$f_{X_1,X_2}(a_1, a_2) = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^2}} e^{-Q_I(a_1,a_2)/2}$$

2 שינוי סטיית תקן על ידי כפל במטריצה אלכסונית D (אליפסה)

3 סיבוב על ידי כפל במטריצה אורתוגונלית V

סך הכל הפעלנו מטריצה מוגדרת חיובית $L = VD$ על $X = (X_1, X_2)$

הצפיפות של LX מתקבלת על ידי "הפעלת" L^{-1} על צפיפות X

התפלגות גאוסית

הגדרה: וקטור אקראי $X \in \mathbb{R}^n$ הוא גאוסי n מימדי אם קיימת מטריצה סימטרית $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ווקטור $\mu \in \mathbb{R}^n$ כך שלכל $a \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$f_X(a) = \sqrt{\frac{det(M)}{(2\pi)^n}} e^{-Q_M(a-\mu)/2}$$

למשל עבור $n = 1$ מתקיים: התוחלת היא μ ו $M = 1/\sigma^2$

וקטור גאוסי מתקבל על ידי טרנספורמציה ליניארית הפיכה של וקטור גאוסי "תקני" (כלומר n קורדינטות נורמליות תקניות בלתי תלויות)

שני מימדים

דוגמא: X גאוסי דו-מימדי

תהי $M = \begin{bmatrix} b & c \\ c & d \end{bmatrix}$ כאשר $b > 0$ ו $det(M) = bd - c^2 > 0$

יהי $\mu \in \mathbb{R}^2$

אז

$$f_X(a) = \sqrt{\frac{bd - c^2}{(2\pi)^2}} e^{-(b(a_1-\mu_1)^2+2c(a_1-\mu_1)(a_2-\mu_2)+d(a_2-\mu_2)^2)/2}$$

הצפיפות היא משטח דמוי פעמון (קווי הגובה שלו הן אליפסות), עם מקסימום בנקודה μ

שאלות:
- מה ההתפלגות השולית של X_1 ?
- מה השונות המשותפת של X_1, X_2 ?
- ...

תכונות

יהי $X = (X_1, \ldots, X_n)$ גאוסי המוגדר על ידי M, μ

א. התפלגויות שוליות: כל X_i הוא נורמלי עם תוחלת μ_i.

ב. שונויות: תהי Σ מטריצת השונות המשותפת של $X_1, \ldots, X_n$ אז

$$\Sigma = M^{-1}$$

למשל עבור $n = 2$: אם $M = \begin{bmatrix} b & c \\ c & d \end{bmatrix}$ אז $\Sigma = \frac{1}{bd-c^2} \begin{bmatrix} d & -c \\ -c & b \end{bmatrix}$

כלומר ניתן לשחזר כל השונויות המשותפות (כולל שונויות עצמן) מ M
בכיוון השני, אם יודעים μ ו Σ אז יודעים צפיפות

תזכורת: X מתקבל מגאוסי תיקני על ידי הפעלת $M^{-1/2}$

תכונות

יהי $X = (X_1, \ldots, X_n)$ גאוסי המוגדר על ידי M, μ

ג. היטל חד-מימדי: לכל $\alpha \in \mathbb{R}^n$ שאינו אפס המתשנה המקרי $\sum_{i\in[n]} \alpha_i X_i$ הוא נורמלי עם תוחלת $\alpha^T \mu$ ושונות $\alpha^T M^{-1} \alpha$

הערה: וקטור מקרי רציף בהחלט Y הוא גאוסי אם ורק אם כל היטל חד-מימדי שלו הוא נורמלי

תכונות

יהי $X = (X_1, \ldots, X_n)$ גאוסי המוגדר על ידי M, μ

ד. היטל רב-מימדי: לכל n ולכל $k \leq n$ מטריצה $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ מדרגה k, המשתנה המקרי AX הוא גאוסי k מימדי

ניתן לחשב את הפרמטרים שלו מתוך M, μ, A
כל קורדינטה של $Y = AX$ היא הטלה חד-מימדית של X ו
$\Sigma_Y = A\Sigma_X A^T$

אם X הוא גאוסי תקני אז AX, עבור A ריבועית הפיכה, הוא גאוסי המוגדר על ידי $M^{-1} = AA^T$ וכך ניתן לקבל כל גאוסי (ניתן גם להזיז בוקטור קבוע)

תכונות

יהי $X = (X_1, \ldots, X_n)$ גאוסי המוגדר על ידי M, μ

ה. חוסר תלות וחוסר תאום: לכל $i \neq j$ ב $[n]$ מתקיים X_i, X_j הם בלתי תלויים אם ורק אם הם בלתי מתואמים

תזכורת: חוסר תלות תמיד גוררת חוסר תיאום, אך לא להיפך

הוכחה עבור $n = 2$:

עבור המטריצה $\begin{bmatrix} b & c \\ c & d \end{bmatrix}$ ראינו $cov(X_1, X_2) = \frac{-c}{bd-c^2}$

לכן אם X_1, X_2 בלתי מתואמים אז $c = 0$ כלומר

$$f_X(a) = \frac{\sqrt{bd}}{2\pi} e^{-\frac{b(x_1-\mu_1)^2 + d(x_2-\mu_2)^2}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{b}}{2\pi} e^{-\frac{b(x_1-\mu_1)^2}{2}} \frac{\sqrt{d}}{2\pi} e^{-\frac{d(x_2-\mu_2)^2}{2}} = f_{X_1}(a_1) f_{X_2}(a_2)$$

תכונות

יהי $X=(X_1,\dots,X_n)$ גאוסי המוגדר על ידי M,μ

ו. התניה: לכל $j \neq i$ ב $[n]$, ההתפלגות של X_i בהנתן X_j היא נורמלית

למשל עבור $n=2$ עם $M=\begin{bmatrix} b & c \\ c & d \end{bmatrix}$ מתקיים (תרגיל)

$$X|Y \sim N\left(\mu_1 - \frac{c}{b}(Y-\mu_2), \frac{1}{b}\right)$$

למשל אם $\mu=(0,0)$ נקבל

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &\propto e^{-\frac{1}{2}(bx^2+2cxy)}h_1(y) \\ &= e^{-\frac{1}{2}(b(x^2+2(c/b)xy))}h_1(y) \\ &= e^{-\frac{1}{2}b(x+(c/b)y)^2}h_2(y) \end{aligned}$$

תכונות

יהי $X = (X_1, \ldots, X_n)$ גאוסי המוגדר על ידי M, μ

ו. התניה: לכל $j \neq i$ ב $[n]$, ההתפלגות של X_i בהנתן X_j היא נורמלית

למשל עבור $n = 2$ עם $M = \begin{bmatrix} b & c \\ c & d \end{bmatrix}$ מתקיים (תרגיל)

$$X|Y \sim N\left(\mu_1 - \frac{c}{b}(Y - \mu_2), \frac{1}{b}\right)$$

בפרט

$$\mathbb{E}[X|Y] = \mu_1 - \frac{c}{b}(Y - \mu_2)$$

היא פונקציה ליניארית של Y

הערה: השונות אינה תלויה ב Y והתוחלת זזה!

סיכום ביניים

מרחב הסתברות

משתנים מיקריים: תוחלת, שונות, קמירות, מומנטים, פונקציה יוצרת ופונקציה אופיינית

וקטורים אקראיים

שונות משותפת ומקדם מתאם

משתנים גאוסים ותכונותיהם: צפיפות, הטלים, שונות משותפת, חוסר תאום גורר חוסר תלות, התניה