מתמטיקה למדעי החיים

אלגברה לינארית

אמיר יהודיוף

הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

מבוא

נתאר מודל מתמטי שמאפשר לייצג מצב העולם, להבין את העולם ולהסביר תופעות בו

השיטה פותחה במאה ה 17 על ידי רנה דקארט שהיה פילוסוף, מתמטיקאי ומדען צרפתי

לשם פשטות, נתחיל בעולם חד מימדי:

עולם חד מימדי מתאים לקו ישר

בקו הישר יש התאמה

נקודה בעולם $\Leftrightarrow$ מספר ממשי x

נעבור לעולם דו מימדי:

עולם דו מימדי מתאים למישור

נקבע במישור מערכת צירים

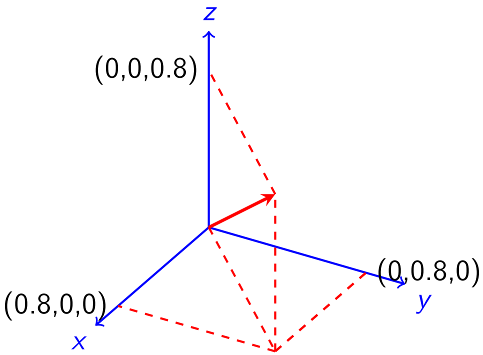
יש התאמה

נקודה בעולם $\Leftrightarrow$ שני מספרים ממשיים (x, y)

נעבור לעולם תלת מימדי: עולם תלת מימדי מתאים למרחב

נקבע מערכת צירים ונקבל התאמה

נקודה בעולם $\Leftrightarrow$ שלושה מספרים ממשיים (x, y, z)



מרחקים

כשימוש ראשון בשיטה, נראה שניתן למדוד מרחקים בין נקודות:

מימד אחד

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$

דו-מימד

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

תלת-מימד

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

(לפי משפט פיתגורס)

וקטורים

וקטור מייצג (למשל במישור)

א. נקודה

ב. שני מספרים

ג. חץ מהראשית לנקודה

ד. כיוון וגודל (הוראות הגעה)

וקטורים דו מימדיים

וקטור דו מימדי הוא מהצורה (x_1, x_2)

אם קבענו מערכת צירים, הוקטור מתאים לחץ במישור

עתה ניתן לחבר (ולהחסיר) וקטורים:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

כמו כן, בהנתן מספר ממשי c ניתן להכפיל בו:

$$c(x, y) = (cx, cy)$$

נתאר משמעות ציורית

חיבור: נלך לפי הוראות ראשונות ואז שניות

כפל: נאריך, נקצר או נהפוך

וקטורים תלת מימדיים

וקטור תלת מימדי הוא מהצורה (x, y, z)

ניתן לחבר וקטורים:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

כמו כן, בהנתן מספר ממשי c ניתן להכפיל בו:

$$c(x, y, z) = (cx, cy, cz)$$

המשמעות הגיאומטרית דומה

גודל

הגודל (נורמה) של וקטור הוא האורך של החץ שמתאים לו:

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ו

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

גודל

הגודל (נורמה) של וקטור הוא האורך של החץ שמתאים לו:

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ו

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

תכונה: לכל וקטור v וקבוע c

$$\|cv\| = |c| \cdot \|v\|$$

גודל

הגודל (נורמה) של וקטור הוא האורך של החץ שמתאים לו:

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ו

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

תכונה: לכל וקטור v וקבוע c

$$\|cv\| = |c| \cdot \|v\|$$

הנורמה מגדירה מרחק, המרחק בין v_1 ו v_2 הוא

$$\|v_1 - v_2\|$$

דוגמא

נתבונן בשלושה מעגלים במישור דרך הראשית $(0,0)$ וברדיוס אחד

נסמן ב $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ את מרכזם

מהם שלושת נקודות החיתוך האחרות?

דוגמא

נתבונן בשלושה מעגלים במישור דרך הראשית $(0,0)$ וברדיוס אחד

נסמן ב $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ את מרכזם

מהם שלושת נקודות החיתוך האחרות?

$$(x_1+x_2,y_1+y_2),(x_1+x_3,y_1+y_3),(x_2+x_3,y_2+y_3)$$

דוגמא

נתבונן בשלושה מעגלים במישור דרך הראשית $(0,0)$ וברדיוס אחד

נסמן ב $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ את מרכזם

מהם שלושת נקודות החיתוך האחרות?

$$(x_1+x_2,y_1+y_2),(x_1+x_3,y_1+y_3),(x_2+x_3,y_2+y_3)$$

מסקנה: שלוש הנקודות הללו על מעגל יחידה סביב

$$(x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3)$$

כי למשל

$$\begin{aligned}\|(x_1+x_2,y_1+y_2)-(x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3)\|\\ =\|(-x_3,-y_3)\|=|-1|\cdot\|(x_3,y_3)\|=1\end{aligned}$$

קטעים

בהנתן שתי נקודות $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ הקטע המחבר בין שתי הנקודות הוא אוסף הנקודות מהצורה

$$t(x_1, y_1) + (1 - t)(x_2, y_2) = (tx_1 + (1 - t)x_2, ty_1 + (1 - t)y_2)$$

עבור $0 \leq t \leq 1$

נצייר במישור

באופן דומה בשלושה מימדים

דוגמאות

נתבונן במשולש במישור ונסמן קודקודיו ב $(0,0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

מהם שלושת אמצעי הצלעות?

דוגמאות

נתבונן במשולש במישור ונסמן קודקודיו ב $(0,0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$

מהם שלושת אמצעי הצלעות?

$(x_1/2, y_1/2), (x_2/2, y_2/2), ((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2)$

דוגמאות

נתבונן במשולש במישור ונסמן קודקודיו ב $(0,0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

מהם שלושת אמצעי הצלעות?

$(x_1/2,y_1/2),(x_2/2,y_2/2),((x_1+x_2)/2,(y_1+y_2)/2)$

קטע האמצעים מהראשית הוא

$$\{t(0,0)+(1-t)((x_1+x_2)/2,(y_1+y_2)/2):0\le t\le 1\}$$

דוגמאות

נתבונן במשולש במישור ונסמן קודקודיו ב $(0,0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$

מהם שלושת אמצעי הצלעות?

$$(x_1/2, y_1/2), (x_2/2, y_2/2), ((x_1+x_2)/2, (y_1+y_2)/2)$$

קטע האמצעים מהראשית הוא

$$\{t(0,0)+(1-t)((x_1+x_2)/2,(y_1+y_2)/2) : 0 \leq t \leq 1\}$$

והוא עובר דרך מרכז המסה של הקודקודים

$$((0+x_1+x_2)/3, (0+y_1+y_2)/3)$$

עבור

$$t = 1/3$$

ומטעמי סימטריה, כל קטעי אמצעים עוברים באותה נקודה

ישרים

בהנתן שתי נקודות v_1, v_2 הישר שעובר בשתי הנקודות הוא אוסף הנקודות מהצורה

$$tv_1 + (1-t)v_2$$

עבור $t \in \mathbb{R}$

נצייר במישור

אם v_1 משמאל ל v_2 אז

בין הנקודות - $0 \leq t \leq 1$

מימין ל v_2 - $t \leq 0$

משמאל ל v_1 - $t \geq 1$

משולשים

בהנתן שלוש נקודות $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ המשולש שהן מגדירות הוא אוסף הנקודות מהצורה

$$t(x_1, y_1) + s(x_2, y_2) + (1 - s - t)(x_3, y_3)$$

עבור $t, s \geq 0$ כך ש $t + s \leq 1$

ההצגה של נקודה באופן זה היא יחידה

נצייר במישור

מסקנה

נתבונן במשולש המוגדר על ידי v_1, v_2, v_3.

נבחר שלוש נקודות על צלעותיו u_1, u_2, u_3.

נחבר u_i ל v_i בקו ישר, לכל $i = 1, 2, 3$.

נסמן ב α, β, γ את יחסי האורכים של הקטעים המתקבלים,
למשל α הוא האורך היחסי של הקטע בין v_2 ל u_1.

משפט: שלושת הקוים נפגשים בנקודה אם ורק אם $1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\gamma}{1-\gamma}$

מסקנה

משפט: שלושת הקוים נפגשים בנקודה אם ורק אם $\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\gamma}{1-\gamma} = 1$

מסקנה

משפט: שלושת הקוים נפגשים בנקודה אם ורק אם $\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\gamma}{1-\gamma} = 1$

הסבר:

א. נניח ששלושת הקווים נפגשים בנקודה $w = av_1 + bv_2 + cv_3$ עבור $a, b, c \geq 0$ כך ש $a + b + c = 1$

מסקנה

משפט: שלושת הקוים נפגשים בנקודה אם ורק אם $\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\gamma}{1-\gamma} = 1$

הסבר:

א. נניח ששלושת הקווים נפגשים בנקודה $w = av_1 + bv_2 + cv_3$ עבור $a, b, c \geq 0$ כך ש $a + b + c = 1$

ב. מהגדרה $u_1 = v_2 + \alpha(v_3 - v_2)$

מסקנה

משפט: שלושת הקוים נפגשים בנקודה אם ורק אם $\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\gamma}{1-\gamma} = 1$

הסבר:

א. נניח ששלושת הקווים נפגשים בנקודה $w = av_1 + bv_2 + cv_3$ עבור $a, b, c \geq 0$ כך ש $a + b + c = 1$

ב. מהגדרה $u_1 = v_2 + \alpha(v_3 - v_2)$

ג. עבור $0 \leq d \leq 1$ כלשהו מתקיים

$$w = dv_1 + (1 - d)u_1$$

מסקנה

משפט: שלושת הקוים נפגשים בנקודה אם ורק אם $\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\gamma}{1-\gamma} = 1$

הסבר:

א. נניח ששלושת הקווים נפגשים בנקודה $w = av_1 + bv_2 + cv_3$ עבור $a, b, c \geq 0$ כך ש $a + b + c = 1$

ב. מהגדרה $u_1 = v_2 + \alpha(v_3 - v_2)$

ג. עבור $0 \leq d \leq 1$ כלשהו מתקיים

$$w = dv_1 + (1-d)u_1$$

ד. מיחידות היצוג $a = d, b = (1-d)(1-\alpha), c = (1-d)\alpha$ כלומר

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{c}{b}$$

מסקנה

משפט: שלושת הקוים נפגשים בנקודה אם ורק אם $\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\gamma}{1-\gamma} = 1$

הסבר:

א. נניח ששלושת הקווים נפגשים בנקודה $w = av_1 + bv_2 + cv_3$ עבור $a, b, c \geq 0$ כך ש $a + b + c = 1$

ב. מהגדרה $u_1 = v_2 + \alpha(v_3 - v_2)$

ג. עבור $0 \leq d \leq 1$ כלשהו מתקיים

$$w = dv_1 + (1 - d)u_1$$

ד. מיחידות היצוג $a = d, b = (1 - d)(1 - \alpha), c = (1 - d)\alpha$ כלומר

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{c}{b}$$

ה. מטעמי סימטריה

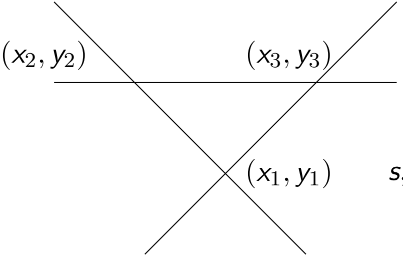
$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\beta}{1-\beta}\frac{\gamma}{1-\gamma} = \frac{c}{b}\frac{a}{c}\frac{b}{a} = 1$$

חלוקת המישור

בהנתן שלוש נקודות $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ נתבונן בנקודות מהצורה

$$t(x_1, y_1) + s(x_2, y_2) + r(x_3, y_3)$$

עבור $t, s, r \in \mathbb{R}$ וישנם שבעה איזורים:



$$s, t \leq 0, r = 1 - s - t$$

$$s, r \geq 0, t = 1 - s - r \leq 0$$

ושאר האזורים באופן דומה

כדורים

הכדור ברדיוס $r \geq 0$ סביב הנקודה v הוא אוסף הנקודות u כך ש $r \leq \|u - v\|$

הספירה ברדיוס $r \geq 0$ סביב הנקודה v הוא אוסף הנקודות u כך ש $r = \|u - v\|$

כדורים

הכדור ברדיוס $r \geq 0$ סביב הנקודה v הוא אוסף הנקודות u כך ש $\|u - v\| \leq r$

הספירה ברדיוס $r \geq 0$ סביב הנקודה v הוא אוסף הנקודות u כך ש $\|u - v\| = r$

באמצעות אלגברה אפשר להראות ששני מעגלים נחתכים בלכל היותר שתי נקודות
ושתי ספירות בשלושה מימדים נחתכות ב"מעגל"

סיכום

- ייצוג נקודות על ידי וקטורים
- פעולות חשבון
- משמעות גיאומטרית
- ניתן לחקור גיאומטריה

ישרים

משוואה של ישר דרך הראשית במישור: $ax + by = 0$ עבור קבועים a, b כך ש $(a, b) \neq (0, 0)$

אם $b \neq 0$, נקודות על הישר הן מהצורה

$$v = \left(x, \frac{-ax}{b}\right)$$

ישר דרך נקודה

מהו הישר $ax + by = 0$ דרך (x_0, y_0) והראשית?

ישר דרך נקודה

מהו הישר $ax+by=0$ דרך (x_0, y_0) והראשית?

מהם a, b כך ש $ax_0+by_0=0$? למשל $a=y_0, b=-x_0$

ישר דרך נקודה

מהו הישר $ax + by = 0$ דרך (x_0, y_0) והראשית?

מהם a, b כך ש $ax_0 + by_0 = 0$? למשל $a = y_0, b = -x_0$

מהו הישר דרך שתי נקודות שונות (x_0, y_0) ו (x_1, y_1)?

ישר דרך נקודה

מהו הישר $ax + by = 0$ דרך (x_0, y_0) והראשית?

מהם a, b כך ש $ax_0 + by_0 = 0$? למשל $a = y_0, b = -x_0$

מהו הישר דרך שתי נקודות שונות (x_0, y_0) ו (x_1, y_1)?

מהם a, b, c כך ש $ax_0 + by_0 = c, ax_1 + by_1 = c$?

אם $x_0 \neq x_1$ אז

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0 \;\Rightarrow\; a = \frac{-b(y_1 - y_0)}{x_1 - x_0}$$

ואחרת $y_0 \neq y_1$ והפתרון דומה

מכפלה פנימית

בהנתן וקטורים $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2)$ נגדיר מכפלה פנימית בניהם

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

מכפלה פנימית

בהנתן וקטורים $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2)$ נגדיר מכפלה פנימית ביניהם

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

נורמה:

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$$

מכפלה פנימית

בהנתן וקטורים $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2)$ נגדיר מכפלה פנימית ביניהם

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

נורמה:

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$$

תכונות: לכל וקטורים v_1, v_2, v_3 וקבוע c

$$\langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle$$
$$\langle c v_1, v_2 \rangle = c \langle v_1, v_2 \rangle$$
$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$$

מכפלה פנימית

בהנתן וקטורים $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2)$ נגדיר מכפלה פנימית ביניהם

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

נורמה:

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$$

תכונות: לכל וקטורים v_1, v_2, v_3 וקבוע c

$$\begin{aligned} \langle v_1 + v_2, v_3 \rangle &= \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle \\ \langle c v_1, v_2 \rangle &= c \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle v_2, v_1 \rangle \end{aligned}$$

בשלושה מימדים:

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

זוויות

משפט: בהנתן וקטורים v_1, v_2 שאינם אפס הזווית בניהם מקיימת

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$$

זוויות

משפט: בהנתן וקטורים v_1, v_2 שאינם אפס הזווית בניהם מקיימת

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$$

משפט קוסינוסים: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$
הסבר: נוריד אנך מול γ מפינה של a, c ונקבל

$$c^2 = (b - a\cos(\gamma))^2 + (a\sin(\gamma))^2$$

זוויות

משפט: בהנתן וקטורים v_1, v_2 שאינם אפס הזווית בניהם מקיימת

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$$

משפט קוסינוסים: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$
הסבר: נוריד אנך מול γ מפינה של a, c ונקבל

$$c^2 = (b - a\cos(\gamma))^2 + (a\sin(\gamma))^2$$

הסבר: משפט הקוסינוסים אומר ש

$$\|v_1 - v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 - 2\|v_1\|\|v_2\|\cos(\theta)$$

ומצד שני

$$\|v_1 - v_2\|^2 = \langle v_1 - v_2, v_1 - v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 - 2\langle v_1, v_2 \rangle$$

אנכים

משפט: $\cos(\theta) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$

$\cos(\theta) = 0$ אם ורק אם $\theta \in \{\pi/2, -\pi/2\}$

מסקנה: v_1, v_2 שאינם אפס מאונכים אם ורק אם $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

דוגמאות

ישרים

משוואה של ישר דרך הראשית במישור: $ax+by=0$ עבור קבועים a,b כך ש $(a,b)\neq(0,0)$

נשים לב שאם v על הישר אז

$$\langle v,(a,b)\rangle = xa + \frac{-ax}{b}b = 0$$

ולהיפך

כלומר הישר הוא אוסף הנקודות המאונכות ל (a,b)

וקטור היחידה $\frac{(a,b)}{\|(a,b)\|}$ נקרא הנורמל של הישר

ציור ישרים

אפשרויות לצייר ישר $ax + by = c$

א. למצוא שתי נקודות על ישר ולהעביר ישר דרכן

ב. למצוא נקודה של ישר והשיפוע מאונך ל (a, b)

חיתוך בין ישרים

בהנתן שני ישרים $a_1x + b_1y = c_1, a_2x + b_2y = c_2$, מהי נקודת החיתוך שלהם (אם אינם מקבילים)?

חיתוך בין ישרים

בהנתן שני ישרים $a_1x + b_1y = c_1,\ a_2x + b_2y = c_2$, מהי נקודת החיתוך שלהם (אם אינם מקבילים)?

פתרון שתי משוואות בשני נעלמים; לדוגמא,

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ -2x + y &= 0 \end{aligned}$$

חיתוך בין ישרים

בהנתן שני ישרים $a_1x + b_1y = c_1,\, a_2x + b_2y = c_2$, מהי נקודת החיתוך שלהם (אם אינם מקבילים)?

פתרון שתי משוואות בשני נעלמים; לדוגמא,

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ -2x + y &= 0 \end{aligned}$$

נכפול ראשונה בשתיים ונסכום $2x - 2x + 4y + y = 4 + 0$ כלומר

$$y = 4/5$$

ולכן

$$x = 2 - 2y = 2 - 8/5 = 2/5$$

נצייר (מאונכים ל $(1,2), (-2,1)$ ונקודות חיתוך עם ציר y - $(0,1), (0,0)$)

היטלים

דמיינו רצפה בכיוון v_1 ועמוד שמתאים ל v_2.

דמיינו מנורה גבוהה מאוד.

מה אורך הצל של העמוד?

היטלים

דמיינו רצפה בכיוון v_1 ועמוד שמתאים ל v_2.

דמיינו מנורה גבוהה מאוד.

מה אורך הצל של העמוד?

ננרמל v_1 לנורמה 1

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \Rightarrow \|u_1\| = 1$$

גודל הצל הוא

$$\|v_2\| \cos(\theta) = \langle u_1, v_2 \rangle = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_2\|}$$

מרחק בין נקודה לישר

מה המרחק בין $v = (x_0, y_0)$ לישר שמשוואתו $ax + by = c$?

מרחק בין נקודה לישר

מה המרחק בין $v = (x_0, y_0)$ לישר שמשוואתו $ax + by = c$?

הזזה: מרחק זה שווה למרחק בין $v - (0, c/b)$ לישר $ax + by = 0$
במידה ו $b \neq 0$

מרחק בין נקודה לישר

מה המרחק בין $v = (x_0, y_0)$ לישר שמשוואתו $ax + by = c$?

הזזה: מרחק זה שווה למרחק בין $v - (0, c/b)$ לישר $ax + by = 0$
במידה ו $b \neq 0$

מרחק זה הוא

$$\left| \left\langle v - (0, c/b), \frac{(a, b)}{\|(a, b)\|} \right\rangle \right| = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

מרחק בין נקודה לישר

מה המרחק בין $v = (x_0, y_0)$ לישר שמשוואתו $ax + by = c$?

הזזה: מרחק זה שווה למרחק בין $v - (0, c/b)$ לישר $ax + by = 0$
במידה ו $b \neq 0$

מרחק זה הוא

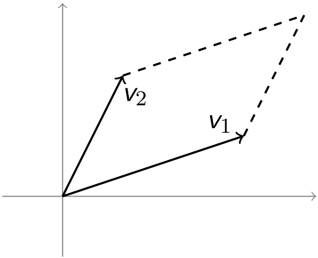
$$\left| \left\langle v - (0, c/b), \frac{(a, b)}{\|(a, b)\|} \right\rangle \right| = \left| \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

קשר לחדו״א - המרחק הוא המינימום של

$$f(x) = \|(x_0, y_0) - (x, (c - ax)/b)\|$$

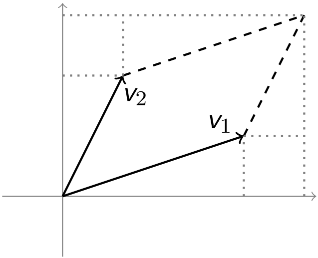
שטחים

שני וקטורים $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ מגדירים מקבילית. מהו שטחה?



שטחים

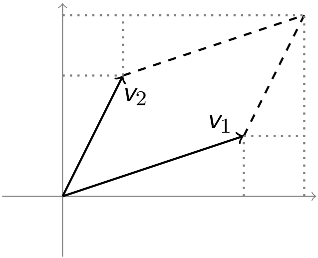
שני וקטורים $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ מגדירים מקבילית. מהו שטחה?



$$\left| \underset{\text{RECT.}}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)} - \underset{4 \text{ triangles}}{(x_1 y_1 + x_2 y_2)} - \underset{2 \text{ rect.}}{2 x_2 y_1} \right| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

שטחים

שני וקטורים $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ מגדירים מקבילית. מהו שטחה?



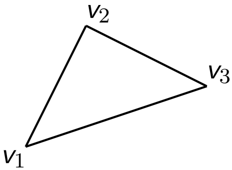
$$\left| \underbrace{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)}_{\text{RECT.}} - \underbrace{(x_1 y_1 + x_2 y_2)}_{4 \text{ triangles}} - \underbrace{2x_2 y_1}_{2 \text{ rect.}} \right| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

סימון:

$$det(v_1, v_2) = det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

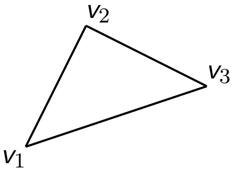
שטחים

שטח משולש שקודקודיו $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$?



שטחים

שטח משולש שקודקודיו $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$?



השטח הוא חצי משטח המקבילית -

$$\frac{|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|}{2}$$
$$= \frac{|x_2 y_3 - y_2 x_3 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - (x_1 y_3 - x_3 y_1)|}{2}$$
$$= \frac{|det(v_2, v_3) + det(v_1, v_2) - det(v_1, v_3)|}{2}$$

מגבלות

נתבונן במשולש שקודקודיו $0, v_1, v_2$ עם קורדינטות שלמות

(יש הרבה כאלו)

טענה: שטחו גדול או שווה לחצי

מגבלות

נתבונן במשולש שקודקודיו $0, v_1, v_2$ עם קורדינטות שלמות

(יש הרבה כאלו)

טענה: שטחו גדול או שווה לחצי

הסבר: השטח הוא

$$\frac{|x_1y_2 - x_2y_1|}{2}$$

המונה הוא מספר שלם חיובי ולכן לפחות אחד

תופעות

נתבונן בשריג בשלמים במישור

נתבונן במשולש שקודקודיו עם קורדינטות שלמות אבל לא מכיל נקודה שלמה

טענה: שטחו שווה לחצי

תופעות

נתבונן בשריג בשלמים במישור

נתבונן במשולש שקודקודיו עם קורדינטות שלמות אבל לא מכיל נקודה שלמה

טענה: שטחו שווה לחצי

הסבר: כמו קודם, השטח הוא חצי משטח המקבילית

נראה ששטח המקבילית הוא אחד -

תופעות

נתבונן בשריג בשלמים במישור

נתבונן במשולש שקודקודיו עם קורדינטות שלמות אבל לא מכיל נקודה שלמה

טענה: שטחו שווה לחצי

הסבר: כמו קודם, השטח הוא חצי משטח המקבילית

נראה ששטח המקבילית הוא אחד -

א. נבחר ריבוע גדול מאוד, n על n

תופעות

נתבונן בשריג בשלמים במישור

נתבונן במשולש שקודקודיו עם קורדינטות שלמות אבל לא מכיל נקודה שלמה

טענה: שטחו שווה לחצי

הסבר: כמו קודם, השטח הוא חצי משטח המקבילית

נראה ששטח המקבילית הוא אחד -

א. נבחר ריבוע גדול מאוד, n על n

ב. ניתן לרצף הריבוע באמצעות מרצפות בצורת המקבילית (אולי חלק יש לשבור)

תופעות

נתבונן בשריג בשלמים במישור

נתבונן במשולש שקודקודיו עם קורדינטות שלמות אבל לא מכיל נקודה שלמה

טענה: שטחו שווה לחצי

הסבר: כמו קודם, השטח הוא חצי משטח המקבילית

נראה ששטח המקבילית הוא אחד -

א. נבחר ריבוע גדול מאוד, n על n

ב. ניתן לרצף הריבוע באמצעות מרצפות בצורת המקבילית (אולי חלק יש לשבור)

ג. כמה יש לשבור? לכל היותר Cn, כש $C > 0$ קבוע

תופעות

נתבונן בשריג בשלמים במישור

נתבונן במשולש שקודקודיו עם קורדינטות שלמות אבל לא מכיל נקודה שלמה

טענה: שטחו שווה לחצי

הסבר: כמו קודם, השטח הוא חצי משטח המקבילית

נראה ששטח המקבילית הוא אחד -

א. נבחר ריבוע גדול מאוד, n על n

ב. ניתן לרצף הריבוע באמצעות מרצפות בצורת המקבילית (אולי חלק יש לשבור)

ג. כמה יש לשבור? לכל היותר Cn, כש $C > 0$ קבוע

ד.

$$\text{שטח מרצפת} \cdot \left(n^2 \pm Cn\right) \approx \text{שטח מרצפת} \cdot \text{כמות מרצפות} \approx \text{שטח המלבן} = n^2$$

שטחים

נתבונן בשריג בשלמים במישור

נתבונן בפוליגון P שקודקודיו שלמים

נסמן -

$I =$ כמות נקודות בתוכו

$B =$ כמות נקודות על שפתו

משפט (פיק): שטחו $= I - 1 + \frac{B}{2}$

שטחים

נתבונן בשריג בשלמים במישור

נתבונן בפוליגון P שקודקודיו שלמים

נסמן -

I = כמות נקודות בתוכו

B = כמות נקודות על שפתו

משפט (פיק): שטחו $= \frac{B}{2} + I - 1$

הוכחה: באינדוקציה ...

תופעות

נסדר את קבוצת כל הרציונלים החיוביים בצורה מצומצמת עם שלמים שערכם המוחלט קטן מ n

$$\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_2}{q_2} > \ldots > \frac{p_k}{q_k}$$

למשל $n = 3$

$$\frac{3}{1} > \frac{2}{1} > \frac{3}{2} > \frac{1}{1} > \frac{2}{3} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

טענה: לכל i

$$p_i q_{i+1} - q_i p_{i+1} = 1$$

תופעות

נסדר את קבוצת כל הרציונלים החיוביים בצורה מצומצמת עם שלמים שערכם המוחלט קטן מ n

$$\frac{p_1}{q_1} > \frac{p_2}{q_2} > \ldots > \frac{p_k}{q_k}$$

למשל $n = 3$

$$\frac{3}{1} > \frac{2}{1} > \frac{3}{2} > \frac{1}{1} > \frac{2}{3} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

טענה: לכל i

$$p_i q_{i+1} - q_i p_{i+1} = 1$$

הסבר: המשולש בין $\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}, \frac{p_i}{q_i}, 0$ לא מכיל נקודה שלמה ולכן שטחו הוא חצי

נצייר עבור $n = 3$

קו-לינאריות

האם $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ על אותו ישר?

קו-לינאריות

האם $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ על אותו ישר?

אפשרות א׳: למצוא משוואת ישר דרך שתיים ולבדוק אם שלישית מקיימת אותו

קו-לינאריות

האם $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ על אותו ישר?

אפשרות א׳: למצוא משוואת ישר דרך שתיים ולבדוק אם שלישית מקיימת אותו

אפשרות ב׳: לבדוק האם שטח המשולש דרכן הוא אפס:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0?$$

קו-לינאריות

האם $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ על אותו ישר?

אפשרות א': למצוא משוואת ישר דרך שתיים ולבדוק אם שלישית מקיימת אותו

אפשרות ב': לבדוק האם שטח המשולש דרכן הוא אפס:

$$?0 = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

מסקנה: משוואת ישר דרך נקודות $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ -

$$0 = (x_2 - x_1)(y - y_1) - (x - x_1)(y_2 - y_1)$$

x_1, y_1, x_2, y_2 הם קבועים

סיכום

ישרים

מכפלה פנימית

דטרמיננטה

זוויות, היטלים, שטחים ועוד

שלושה מימדים

נורמות

מישור - $ax + by + cz = d$

מכפלה פנימית וזוויות