מבוא להסתברות ח׳

חלק 6

אמיר יהודיוף
הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

עד כה

מרחב הסתברות

משתנים מיקריים: תוחלת, שונות

קמירות

מומנטים, פונקציה יוצרת ופונקציה אופיינית

וקטורים אקראיים

רשימה של מדידות/וקטור של משתנים מיקריים

הגדרה: יהיו $X_1, \ldots, X_k$ משתנים מיקריים מעל Ω. הפונקציה

$$X = (X_1, \ldots, X_k) : \Omega \to \mathbb{R}^k$$

היא וקטור אקראי

הגדרות:

א. המספר k נקרא המימד של X

ב. X נקרא בדיד אם X_i בדיד לכל $i \in [k]$

וקטורים אקראיים בדידים

אם $X = (X_1, \ldots, X_k)$ וקטור אקראי בדיד אז יש פונקציית הסתברות משותפת $P_X : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ כך שלכל $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ מתקיים

$$P_X(a) = \mathbb{P}(X_1 = a_1, \ldots, X_k = a_k) \in [0, 1]$$

ובנוסף

$$\sum_{a \in \mathbb{R}^k} P_X(a) = 1$$

התפלגויות שוליות

וקטור אקראי בדיד $X = (X_1, \ldots, X_k)$ משרה התפלגויות שוליות: לכל $i \in [k]$
ישנה התפלגות $P_{X_i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ של X_i המקיימת

$$P_{X_i}(\mathbf{a}) = \sum_{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k \in \mathbb{R}} P_X(a_1, \ldots, a_{i-1}, \mathbf{a}, a_{i+1}, \ldots, a_k)$$

הערה: מ P_X ניתן לקבל $P_{X_1}, \ldots, P_{X_k}$ אבל לא להיפך

דוגמא

נתבונן ב $X \in \{0,1\}$ ו $Y \in \{2,3,4\}$ עם $P_{(X,Y)}$ המוגדרת על ידי

	2	3	4
0	0.1	0.2	0.1
1	0.3	0.3	0

אז

$$P_X(0) = 0.1 + 0.2 + 0.1 = 0.4\ , \quad P_X(1) = 0.3 + 0.3 = 0.6$$

ו

$$P_Y(2) = 0.4\ , \quad P_Y(3) = 0.5\ , \quad P_Y(4) = 0.1$$

הערה: $P_{(X,Y)}$ נקבעת על ידי חמישה מספרים ו P_X, P_Y נקבעות על ידי שלושה מספרים

דוגמא

משתנה מקרי מולטינומי: סדרה של n ניסויים בלתי תלויים. לכל ניסוי k תוצאות אפשריות. מודד כמה מכל סוג.

הגדרה: $X \sim Mul(n, p_1, p_2, \ldots, p_k)$

עבור $0 \leq p_1, p_2, \ldots, p_k$ כך ש $\sum_{i \in [k]} p_i = 1$

אם לכל $0 \leq a_1, \ldots, a_k$ שלמים כך ש $\sum_{i \in [k]} a_i = n$

מתקיים

$$\mathbb{P}_X(a_1, \ldots, a_k) = \frac{n!}{a_1! a_2! \cdots a_k!} p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

דוגמא

משתנה מקרי מולטינומי $X \sim Mul(n, p_1, p_2, \ldots, p_k)$ מודד כמה תוצאות מכל סוג יש בסדרה של n ניסויים בלתי תלויים, כאשר לכל ניסוי k תוצאות אפשריות.

הערות (תרגילים):

א. אם $(Y, Z) \sim Mul(n, p, 1-p)$ אז $Y \sim Bin(n, p)$

ב. לכל $i \in [k]$ מתקיים $X_i \sim Bin(n, p_i)$

ג. לכל $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq k$ מתקיים: $(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_r})$ הוא הטלה של $Mul(n, p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_{r-1}}, 1 - p_{i_1} - \ldots - p_{i_r})$ ל r קורדינטות ראשונות

וקטור אקראי רציף

הגדרה: וקטור אקראי $X = (X_1, \ldots, X_k)$ נקרא רציף (בהחלט) אם קיימת פונקצית צפיפות $f_X : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$ כך שלכל מאורע $A \subseteq \mathbb{R}^k$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_{a \in A} f_X(a) da$$

(תזכורת: מאורע A הוא למשל תיבה וחיתוכים ואיחודים בני מניה של כאלו)

צפיפות שולית

וקטור אקראי $X = (X_1, \ldots, X_k)$ נקרא רציף (בהחלט) אם קיימת $f_X : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$ כך שלכל מאורע $A \subseteq \mathbb{R}^k$ מתקיים $\mathbb{P}(X \in A) = \int_{a \in A} f_X(a) da$

הגדרה: לכל $i \in [k]$ ניתן להגדיר צפיפות שולית $f_{X_i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ על ידי

$$f_{X_i}(\mathbf{a}) = \int_{a'=(a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_k)\in\mathbb{R}^{k-1}} f_X(a_1, \ldots, a_{i-1}, \mathbf{a}, a_{i+1}, \ldots, a_k) da'$$

דוגמאות

א. אחיד: בהנתן תחום "סביר" $D \subset \mathbb{R}^k$ בעל נפח סופי $vol(D) < \infty$ נגדיר $X \sim U(D)$ כך:

$$f_X(a) = \begin{cases} \frac{1}{vol(D)} & a \in D \\ 0 & a \in \mathbb{R}^k \setminus D \end{cases}$$

כלומר, לכל מאורע $A \subseteq \mathbb{R}^k$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{vol(A \cap D)}{vol(D)}$$

דוגמאות

ב. אחיד במעגל: יהי

$$D = \{a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1^2 + a_2^2 \leq 1\}$$

ויהי $X \sim U(D)$ כלומר $f_X(a) = \frac{1}{\pi}$ לכל $a \in D$

מהן הצפיפויות השוליות?

ניחוש: צפיפות אינה אחידה בקטע $[-1, 1]$ אלא צפיפות בסביבת אפס גדולה מבסביבת אחד או מינוס אחד

אכן: לכל $a \in [-1, 1]$ מתקיים

$$f_{X_1}(a) = \int_{-\sqrt{1-a^2}}^{\sqrt{1-a^2}} \frac{1}{\pi} db = \frac{2\sqrt{1-a^2}}{\pi}$$

סיכום ביניים

מרחב הסתברות

משתנים מיקריים: תוחלת, שונות

קמירות

מומנטים, פונקציה יוצרת ופונקציה אופיינית

וקטורים אקראיים: בדידים (הסתברות), רציפים (צפיפות)

פונקציית התפלגות

הגדרה: בהנתן וקטור אקראי $X = (X_1, \ldots, X_k)$ נגדיר פונקציית התפלגות
$F_X : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ על ידי

$$F_X(a) = \mathbb{P}(X_1 \le a_1, X_2 \le a_2, \ldots, X_k \le a_k)$$

אבחנה: לכל $i \in [k]$ ההתפלגות (השולית) של X_i היא

$$F_{X_i}(\mathbf{a_i}) = \lim_{\substack{a_1 \to \infty \\ \ldots \\ a_{i-1} \to \infty \\ a_{i+1} \to \infty \\ \ldots \\ a_k \to \infty}} F_X(a_1, \ldots, a_{i-1}, \mathbf{a_i}, a_{i+1}, \ldots, a_k)$$

פונקציית התפלגות

אם $X = (X_1, X_2)$ וקטור אקראי רציף אז

$$F_X(a_1, a_2) = \int_{-\infty}^{a_1} \int_{-\infty}^{a_2} f_X(y_1, y_2) dy_1 dy_2$$

להיפך: אם F_X גזירה בנקודה $a = (a_1, a_2)$ אז

$$f_X(a) = \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_1} F_X(y_1, y_2) \Big|_{y=a}$$

הערה: בדומה עבור משתנה מקרי בדיד

תלות וחוסר תלות

הגדרה: המשתנים המקריים X, Y הם בלתי תלויים אם לכל שני מאורעות A, B מתקיים

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B)$$

במקרה בדיד שקול ל: $P_{(X,Y)}(a,b) = P_X(a) \cdot P_Y(b)$

במקרה רציף בהחלט שקול ל: $f_{(X,Y)}(a,b) = f_X(a) \cdot f_Y(b)$

באופן כללי שקול ל: $F_{(X,Y)}(a,b) = F_X(a) \cdot F_Y(b)$

הערה: באופן דומה ניתן להגדיר עבור k משתנים מקריים

דוגמאות

א. מולטינומי: אם $(X,Y) \sim Mul(n,p,1-p)$

אז $X \sim B(n,p)$ ו $Y \sim B(n,1-p)$

אבל X,Y אינם בלתי תלויים, למשל

$$\mathbb{P}(X=n, Y=n) = 0 < \mathbb{P}(X=n) \cdot \mathbb{P}(Y=n)$$

דוגמאות

ב. נניח X, Y מקבלים ערכים ב $\{0,1\}$ כך ש

$$\mathbb{P}(X=0)=0.4\ ,\ \ \mathbb{P}(Y=0)=0.7$$

האם בלתי תלויים?

לא מספיק מידע: למשל שתי אפשרויות

	$Y=0$	$Y=1$	
$X=0$	0.28	0.12	0.4
$X=1$	0.42	0.18	0.6
	0.7	0.3	

	$Y=0$	$Y=1$	
$X=0$	0.3	0.1	0.4
$X=1$	0.4	0.2	0.6
	0.7	0.3	

תוחלת של מכפלה

ראינו: לכל X, Y מתקיים $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

מה לגבי $\mathbb{E}(X \cdot Y)$?

לא תמיד ניתן לומר, אבל

משפט: אם X, Y משתנים מקריים בלתי תלויים אז $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

הוכחה (במקרה בדיד):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_a \mathbb{P}(XY = a)a = \sum_a \sum_b \mathbb{P}(X = b, Y = a/b)b(a/b) \\
&\underset{\text{indep.}}{=} \sum_a \sum_b \mathbb{P}(X = b)\mathbb{P}(Y = a/b)b(a/b) \\
&= \sum_b \mathbb{P}(X = b)b \sum_a \mathbb{P}(Y = a/b)(a/b) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

התניה

ניתן להתנות בין משתנים מיקריים

במקרה הבדיד: אם X, Y בדידים, אז לכל $b \in \mathbb{R}$ כך ש $\mathbb{P}(Y = b) > 0$ ניתן להגדיר

$$P_{X|Y}(a|b) = \frac{P_{X,Y}(a, b)}{P_Y(b)}$$

לכל b קבוע זוהי פונקצית הסתברות על a

תרגיל: X, Y בלתי תלויים אם ורק אם $P_{X|Y}(a|b) = P_X(a)$

דוגמא

א. יהי $X \sim U(\{-1,0,1,2\})$ ויהי $Y = |X|$

התפלגות Y בהנתן X: לכל $a \in \{-1,0,1,2\}$ מתקיים

$$P_{Y|X}(b|a) = \begin{cases} 1 & b = |a| \\ 0 & b \neq |a| \end{cases}$$

התפלגות X בהנתן Y:

$$P_{X|Y}(a|b) = \begin{cases} 1 & b = a = 0 \\ 1 & b = a = 2 \\ 1/2 & b = 1, a \in \{-1,1\} \end{cases}$$

התניה במשתנה רציף

ניתן להתנות גם במשתנה מקרי רציף

הגדרה: יהי (X, Y) רציף בהחלט. לכל $b \in \mathbb{R}$ כך ש $f_Y(b) > 0$ נגדיר

$$f_{X|Y}(a, b) = \frac{f_{X,Y}(a, b)}{f_Y(b)}$$

לכל b קבוע זוהי צפיפות על a

פרשנות: לא מתנים במאורע $Y = b$ שקורה בהסתברות אפס, אלא במאורע $Y \in [b - \delta, b + \delta]$ ומניחים ל δ לשאוף לאפס

דוגמא

אחיד במעגל היחידה: יהי $X \sim U(D)$ עבור $D = \{a \in \mathbb{R}^2 : a_1^2 + a_2^2 \leq 1\}$

לכל $b \in (-1,1)$ נקבל

$$f_{X|Y}(a|b) = \begin{cases} \frac{1/\pi}{2\sqrt{1-b^2}/\pi} = \frac{1}{2\sqrt{1-b^2}} & |a| \leq \sqrt{1-b^2} \\ 0 & |a| > \sqrt{1-b^2} \end{cases}$$

באופן אינטואיטיבי $X|Y$ הוא "אחיד בקטע $[-\sqrt{1-Y^2}, \sqrt{1-Y^2}]$"

מקבילים מעולם בדיד

נוסחת הסתברות שלמה:

$$f_X(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(a|b) f_Y(b) db$$

נוסחת בייס:

$$f_{Y|X}(b|a) = \frac{f_{X|Y}(a|b) f_Y(b)}{f_X(a)}$$

(כאשר הכל מוגדר היטב)

סיכום ביניים

מרחב הסתברות

משתנים מיקריים: תוחלת, שונות

קמירות

מומנטים, פונקציה יוצרת ופונקציה אופיינית

וקטורים אקראיים: בדידים, רציפים, התפלגות, תלות וחוסר תלות, תוחלת של מכפלה, התניה

תוחלת מותנה

בדיד:

$$\mathbb{E}[X|Y=b]=\sum_a \mathbb{P}(X=a|Y=b)a$$

רציף:

$$\mathbb{E}[X|Y=b]=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(a|b)a\,da$$

הערות:

א. שתיהן פונקציות של b כלומר $\mathbb{E}(X|Y)$ היא משתנה מקרי (פונקציה של Y)

ב. ליניאריות התוחלת עדיין תקפה: לכל פונקציה g המוגדרת על Y מתקיים
$\mathbb{E}(g(Y)X|Y)=g(Y)\mathbb{E}(X|Y)$

דוגמא

משתנה מקרי $(X,Y) \sim U(D)$ עבור D מעגל היחידה במישור

לכל $b \in (-1,1)$ מתקיים

$$\mathbb{E}(X|Y=b) = \int_{-\sqrt{1-b^2}}^{\sqrt{1-b^2}} \frac{a}{2\sqrt{1-b^2}} da = 0$$

משפט ההחלקה

משפט: לכל משתנים מקריים X, Y מתקיים

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$$

הוכחה (עבור בדידים):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) &= \sum_{b: P_Y(b)>0} \mathbb{P}(Y=b)\mathbb{E}(X|Y=b) \\
&= \sum_{b: P_Y(b)>0} \mathbb{P}(Y=b) \sum_a \mathbb{P}(X=a|Y=b)a \\
&= \sum_a a \sum_{b: P_Y(b)>0} \mathbb{P}(Y=b)\mathbb{P}(X=a|Y=b) \\
&= \sum_a a\mathbb{P}(X=a) = \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

דוגמאות

א. יהי $X \sim U(\{-1,0,1,2\})$ ויהי $Y = |X|$

אז

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) \\ &= \mathbb{P}(Y=0)\mathbb{E}(X|Y=0) + \mathbb{P}(Y=1)\mathbb{E}(X|Y=1) + \mathbb{P}(Y=2)\mathbb{E}(X|Y=2) \\ &= (1/4)0 + (1/2)0 + (1/4)2 = 1/2\end{aligned}$$

דוגמאות

ב. ישנם שני חוקרים שעורכים ניסויים בלתי תלויים
אליס מבצעת סדרת ניסויים עם סיכוי הצלחה חצי
בוב מבצע סדרת ניסויים עם סיכוי הצלחה שליש

נגדיר: X להיות מספר הצלחות של אליס עד הצלחה ראשונה של בוב

שאלה: מהי $\mathbb{E}(X)$?

נגדיר: Y להיות הצלחה ראשונה של בוב ונחשב

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(Y/2) = \mathbb{E}(Y)/2 = 3/2$$

סיכום ביניים

מרחב הסתברות

משתנים מיקריים

וקטורים אקראיים: בדידים, רציפים, התפלגות, תלות וחוסר תלות, תוחלת של מכפלה, התניה

תוחלת מותנת ונוסחת החלקה