מתמטיקה למדעי החיים

שטחים

אמיר יהודיוף

הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

שטחים

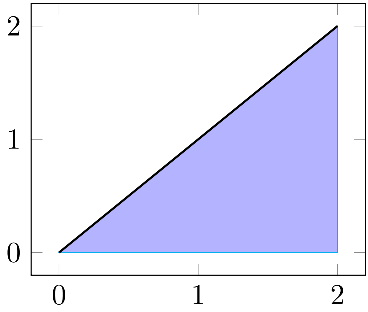
מדידות של שטחים ונפחים מופיעות בתחומים רבים

נתאר דרך למדוד שטחים של צורות מורכבות

דוגמא

דוגמא: השטח הכלוא בין הגרף של $f(x) = x$ לציר ה x בין 0 ל 2

סימון: $\int_0^2 xdx$

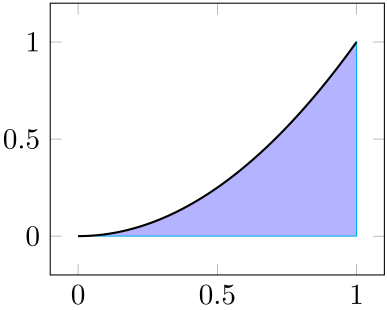


מה השטח?

דוגמא

דוגמא: השטח הכלוא בין הגרף של x^2 לציר ה x בין 0 ל 1

סימון: $\int_0^1 x^2 dx$



מה השטח?

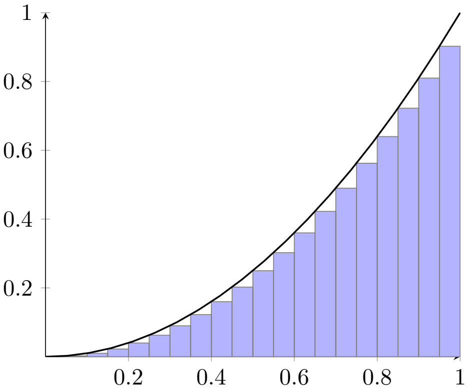
דוגמא

מהו השטח הכלוא בין הגרף של x^2 לציר ה x בין 0 ל 1 ? מהו $\int_0^1 x^2 dx$?

דוגמא

מהו השטח הכלוא בין הגרף של x^2 לציר ה x בין 0 ל 1 ? מהו $\int_0^1 x^2 dx$?

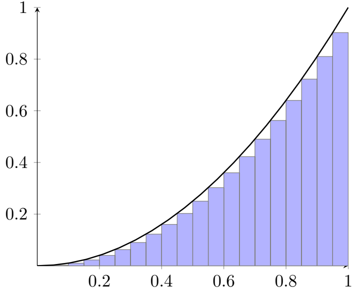
קירוב: השטח הוא בערך סכום שטחי המלבנים



דוגמא

מהו השטח הכלוא בין הגרף של x^2 לציר ה x בין 0 ל 1 ? מהו $\int_0^1 x^2 dx$?

קירוב: השטח הוא בערך סכום שטחי המלבנים



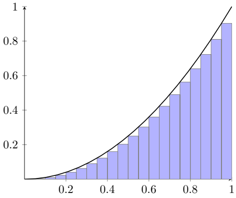
חילקנו את $[0,1]$ ל 20 קטעים וקיבלנו 20 מלבנים עם

- בסיס באורך $1/20$
- גבהים $0, (1/20)^2, (2/20)^2, \ldots, (19/20)^2$
- שטחים $0, 1/20^3, 2^2/20^3, 3^2/20^3, \ldots, 19^2/20^3$

דוגמא

מהו $\int_0^1 x^2 dx$?

קירוב: השטח הוא בערך סכום שטחי המלבנים



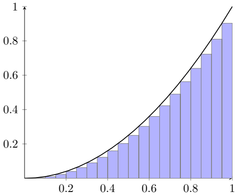
חילקנו את $[0,1]$ ל 20 קטעים וקיבלנו 20 מלבנים

עם שטחים $0, 1/20^3, 2^2/20^3, 3^2/20^3, \ldots, 19^2/20^3$

דוגמא

מהו $\int_0^1 x^2 dx$?

קירוב: השטח הוא בערך סכום שטחי המלבנים



חילקנו את $[0,1]$ ל 20 קטעים וקיבלנו 20 מלבנים

עם שטחים $0, 1/20^3, 2^2/20^3, 3^2/20^3, \ldots, 19^2/20^3$

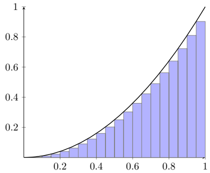
שטח $\approx$ סכום שטחי המלבנים

$$= \frac{1}{20^3}\left(1+2^2+3^2+4^2+\ldots+19^2\right) = \frac{2470}{20^3} \approx 0.3$$

דוגמא

מהו $\int_0^1 x^2 dx$?

קירוב: השטח הוא בערך סכום שטחי המלבנים



אם נחלק ל 50 חלקים במקום 20

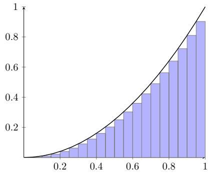
- הקירוב יהיה טוב יותר
- שטחי המלבנים הם $0, 1/50^3, 2^2/50^3, 3^2/50^3, \ldots, 49^2/50^3$

$$\text{שטח} \approx \frac{1}{50^3}\left(1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 49^2\right) \approx 0.32$$

דוגמא

מהו $\int_0^1 x^2 dx$?

קירוב: השטח הוא בערך סכום שטחי המלבנים



אם נחלק ל 50 חלקים במקום 20

- הקירוב יהיה טוב יותר

- שטחי המלבנים הם $0, 1/50^3, 2^2/50^3, 3^2/50^3, \ldots, 49^2/50^3$

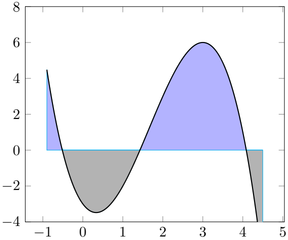
$$\text{שטח} \approx \frac{1}{50^3}\left(1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 49^2\right) \approx 0.32$$

השטח האמיתי מתקבל כגבול והוא שליש $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

הכללה

בהנתן פונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ השטח הכלוא בין הגרף של f לציר ה x בין a ל b מסומן ב

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

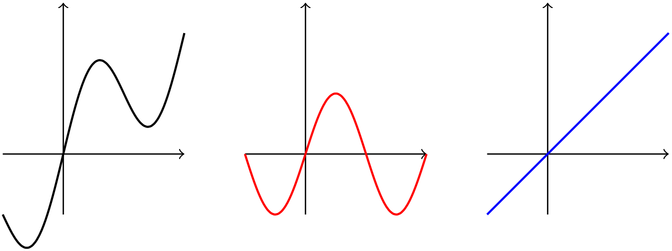


השטח הכחול (מעל) חיובי והאפור (מתחת) שלילי

חיבוריות

א. לכל a, b ממשיים מתקיים

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$



חיבוריות

א. לכל a, b ממשיים מתקיים

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

ב. לכל a, b, c ממשיים מתקיים

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

שמירה על סדר

א. אם $f(x) \geq 0$ לכל x אז לכל a, b מתקיים

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

שמירה על סדר

א. אם $f(x) \geq 0$ לכל x אז לכל a, b מתקיים

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

ב. אם $f(x) \geq g(x)$ לכל x אז לכל a, b מתקיים

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

אי שיוויון המשולש

לכל a, b מתקיים

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

נובע מ $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$

התחלה וסוף

מוסכמה: לכל a, b מתקיים

$$\int_a^b f(x)d = -\int_b^a f(x)dx$$

שטח כפונקציה

בהנתן $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ נגדיר פונקציה חדשה: לכל $a\le x\le b$

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

שטח כפונקציה

בהנתן $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ נגדיר פונקציה חדשה: לכל $a\leq x\leq b$

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

תכונה: F רציפה גם אם f חסומה (אפילו אם לא רציפה)

הסבר?

שטח כפונקציה

בהנתן $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ נגדיר פונקציה חדשה: לכל $a\le x\le b$

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

תכונה: F רציפה גם אם f חסומה (אפילו אם לא רציפה)

הסבר?

דוגמאות:

א. $\frac{1}{2}x^2 =$ שטח של משולש $= \int_0^x tdt$

שטח כפונקציה

בהנתן $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ נגדיר פונקציה חדשה: לכל $a\le x\le b$

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

תכונה: F רציפה גם אם f חסומה (אפילו אם לא רציפה)

הסבר?

דוגמאות:

א. $\int_0^x tdt=$ שטח של משולש $=\frac{1}{2}x^2$

ב. אינטגרל של פונקצית מדרגה זו פונקציה רציפה

משפט יסודי

משפט (יסודי של חדו״א): לכל $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ רציפה, הפונקציה $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

היא גזירה ובנוסף $F'(x) = f(x)$

משפט יסודי

משפט (יסודי של חדו״א): לכל $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ רציפה, הפונקציה $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

היא גזירה ובנוסף $F'(x) = f(x)$

הסבר:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

משפט יסודי

משפט יסודי (של חדו״א): לכל $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ רציפה, הפונקציה $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

היא גזירה ובנוסף $F'(x) = f(x)$

הסבר:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \end{aligned}$$

משפט יסודי

משפט (יסודי של חדו"א): לכל $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ רציפה, הפונקציה $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

היא גזירה ובנוסף $F'(x) = f(x)$

הסבר:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \\ &= \lim_{h\to0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \end{aligned}$$

משפט יסודי

משפט יסודי (יסודי של חדו"א): לכל $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה, הפונקציה $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

היא גזירה ובנוסף $F'(x) = f(x)$

הסבר:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \\ &=^* \lim_{h\to 0} \frac{f(x)\cdot h}{h} = f(x) \end{aligned}$$

מסקנות

אם f רציפה, אז $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ גזירה ו $F'(x) = f(x)$

מסקנות

אם f רציפה, אז $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ גזירה ו $F'(x) = f(x)$

מסקנות:

א. קשר בין אינטגרל לא מסוים לחישובי שטח...

מסקנות

אם f רציפה, אז $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ גזירה ו $F'(x) = f(x)$

מסקנות:

א. קשר בין אינטגרל לא מסוים לחישובי שטח...

ב. חישובי נגזרת:

$$\left(\int_0^x \tan(e^t)dt\right)' =$$

מסקנות

אם f רציפה, אז $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ גזירה ו $F'(x)=f(x)$

מסקנות:

א. קשר בין אינטגרל לא מסוים לחישובי שטח...

ב. חישובי נגזרת:

$$\left(\int_0^x \tan(e^t)dt\right)' = \tan(e^x)$$

מסקנות

אם f רציפה, אז $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ גזירה ו $F'(x)=f(x)$

מסקנות:

א. קשר בין אינטגרל לא מסוים לחישובי שטח...

ב. חישובי נגזרת:

$$\left(\int_0^x \tan(e^t)dt\right)' = \tan(e^x)$$

$$\left(\int_0^{\sin(x)} f(t)dt\right)' =$$

מסקנות

אם f רציפה, אז $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ גזירה ו $F'(x) = f(x)$

מסקנות:

א. קשר בין אינטגרל לא מסוים לחישובי שטח...

ב. חישובי נגזרת:

$$\left(\int_0^x \tan(e^t)dt\right)' = \tan(e^x)$$

$$\left(\int_0^{\sin(x)} f(t)dt\right)' = f'(\sin(x)) \cdot \cos(x)$$

סיכום ביניים

הגדרנו $\int_a^b f(x)\,dx$ כשטח

ראינו דוגמא של קירוב השטח

ראינו תכונות ודוגמאות

ראינו קשר לאינטגרל לא מסוים (אנטי-נגזרת)

חישובי שטח

משפט (ניוטון-ליבניץ): אם $F'(x) = f(x)$ לכל x ו f רציפה אז

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

חישובי שטח

משפט (ניוטון-ליבניץ): אם $F'(x)=f(x)$ לכל x ו f רציפה אז

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

הסבר:

א. נגדיר

$$G(x)=\int_a^x f(t)dt$$

וממשפט יסודי ידוע כי $G'(x)=f(x)$ לכל $x\in(a,b)$

חישובי שטח

משפט (ניוטון-ליבניץ): אם $F'(x) = f(x)$ לכל x ו f רציפה אז

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

הסבר:

א. נגדיר

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

וממשפט יסודי ידוע כי $G'(x) = f(x)$ לכל $x \in (a, b)$

ב. לכן $(F - G)' = 0$ ולכן הפונקציה $F - G$ קבועה (ראינו). כלומר

$$G(x) = F(x) + c$$

עבור קבוע c

חישובי שטח

משפט (ניוטון-ליבניץ): אם $f(x) = F'(x)$ לכל x ו f רציפה אז

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

הסבר:

א. נגדיר

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

וממשפט יסודי ידוע כי $G'(x) = f(x)$ לכל $x \in (a, b)$

ב. לכן $(F - G)' = 0$ ולכן הפונקציה $F - G$ קבועה (ראינו). כלומר

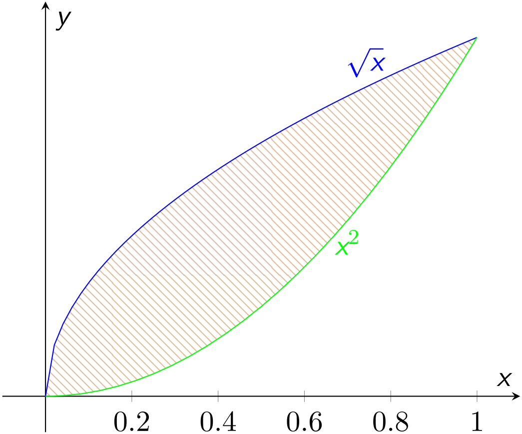
$$G(x) = F(x) + c$$

עבור קבוע c

ג. נשים לב $0 = G(a) = F(a) + c$ ולכן $c = -F(a)$

דוגמאות

תרגיל: מהו $\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx$?



דוגמאות

תרגיל: מהו $\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx$?

פתרון:

משפט (ניוטון-ליבניץ): אם $F' = f$ ו f רציפה אז $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$$\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx$$

דוגמאות

תרגיל: מהו $\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx$?

פתרון:

משפט (ניוטון-ליבניץ): אם $F' = f$ ו f רציפה אז $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$$\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1$$

דוגמאות

תרגיל: מהו $\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx$?

פתרון:

משפט (ניוטון-ליבניץ): אם $F' = f$ ו f רציפה אז $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$$\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1$$
$$= \frac{2}{3}1^{3/2} - \frac{1^3}{3} - \left(\frac{2}{3}0^{3/2} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

הצבה

משפט: אם f רציפה ו g גזירה אז

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx$$

הצבה

משפט: אם f רציפה ו g גזירה אז

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx$$

הסבר: נבחר F כך ש $f = F'$

א. מניוטון ליבניץ $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = F(g(b)) - F(g(a))$

הצבה

משפט: אם f רציפה ו g גזירה אז

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx$$

הסבר: נבחר F כך ש $f = F'$

א. מניוטון ליבניץ $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = F(g(b)) - F(g(a))$

ב. ובדומה $(F(g(x)))' = f(g(x))g'(x)$ גורר ש

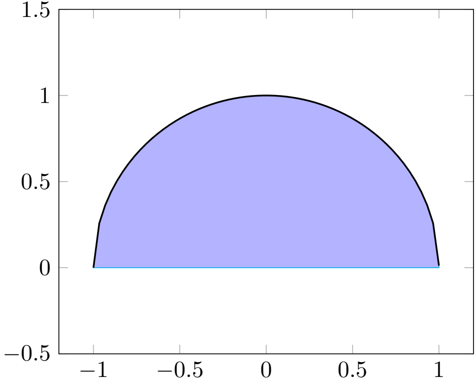
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a))$$

דוגמאות

תרגיל: מהו $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$?

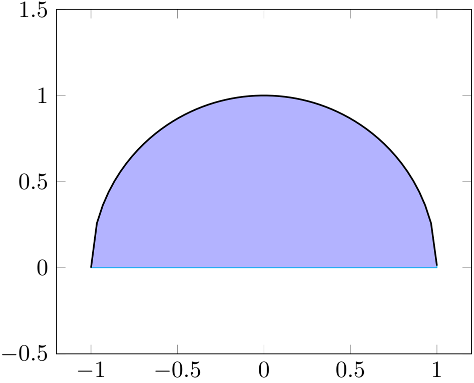
דוגמאות

תרגיל: מהו $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$?



דוגמאות

תרגיל: מהו $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$? $\frac{\pi}{2}$



דוגמאות

תרגיל: מהו $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$?

פתרון:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx \underset{x=\sin(t),\frac{dx}{dt}=\cos(t)}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-(\sin(t))^2}\cos(t)dt$$

דוגמאות

תרגיל: מהו $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$?

פתרון:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx \underset{x=\sin(t),\frac{dx}{dt}=\cos(t)}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-(\sin(t))^2}\cos(t)dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos(t))^2 dt$$

דוגמאות

תרגיל: מהו $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$?

פתרון:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx \underset{x=\sin(t),\frac{dx}{dt}=\cos(t)}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-(\sin(t))^2}\cos(t)dt$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos(t))^2 dt$$

נשים לב $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin(t))^2 dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos(t))^2 dt$

דוגמאות

תרגיל: מהו $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$?

פתרון:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx \underset{x=\sin(t),\frac{dx}{dt}=\cos(t)}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-(\sin(t))^2}\cos(t)dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos(t))^2 dt$$

נשים לב $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos(t))^2 dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin(t))^2 dt$

ולכן

$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos(t))^2 dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin(t))^2 dt$$

דוגמאות

תרגיל: מהו $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$?

פתרון:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx \underset{x=\sin(t),\frac{dx}{dt}=\cos(t)}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-(\sin(t))^2}\cos(t)dt$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos(t))^2 dt$$

נשים לב $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos(t))^2 dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin(t))^2 dt$

ולכן

$$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos(t))^2 dt + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin(t))^2 dt$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}1dt = \pi$$

רימן

הסבר כססכום רימן: בהנתן $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ו $F'=f$, ניתן לקרב השטח $\int_a^b f(x)dx$ על ידי חלוקת $[a,b]$ ל n קטעים ובחירת

$$x_0=a,x_1,x_2,\ldots,x_n=b$$

כך ש

$$\int_a^b f(x)dx$$

רימן

הסבר כססכום רימן: בהנתן $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ו $F' = f$, ניתן לקרב השטח $\int_a^b f(x)dx$ על ידי חלוקת $[a,b]$ ל n קטעים ובחירת

$$x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$$

כך ש

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot(x_i - x_{i-1})^2$$

רימן

הסבר כססכום רימן: בהנתן $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה ו $F' = f$, ניתן לקרב השטח $\int_a^b f(x)dx$ על ידי חלוקת $[a,b]$ ל n קטעים ובחירת

$$x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$$

כך ש

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1})^2 \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} F'(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1})^2\end{aligned}$$

רימן

הסבר כססכום רימן: בהנתן $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ו $F'=f$, ניתן לקרב השטח $\int_a^b f(x)dx$ על ידי חלוקת $[a,b]$ ל n קטעים ובחירת

$$x_0=a,x_1,x_2,\ldots,x_n=b$$

כך ש

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot(x_i-x_{i-1})^2 \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} F'(x_i)\cdot(x_i-x_{i-1})^2 \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\cdot(x_i-x_{i-1})^2
\end{aligned}$$

רימן

הסבר כסכום רימן: בהנתן $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה ו $F' = f$, ניתן לקרב השטח $\int_a^b f(x)dx$ על ידי חלוקת $[a,b]$ ל n קטעים ובחירת

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$$

כך ש

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot(x_i - x_{i-1})^2 \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} F'(x_i)\cdot(x_i - x_{i-1})^2 \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\cdot(x_i - x_{i-1})^2 \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1})
\end{aligned}$$

רימן

הסבר כססכום רימן: בהנתן $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה ו $F' = f$, ניתן לקרב השטח $\int_a^b f(x)dx$ על ידי חלוקת $[a,b]$ ל n קטעים ובחירת

$$x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$$

כך ש

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1})^2 \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} F'(x_i) \cdot (x_i - x_{i-1})^2 \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \cdot (x_i - x_{i-1})^2 \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) \approx F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

רימן

הסבר כסכום רימן: בהנתן $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה ו $F' = f$, ניתן לקרב השטח $\int_a^b f(x)dx$ על ידי חלוקת $[a,b]$ ל n קטעים ובחירת

$$x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$$

כך ש

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot(x_i - x_{i-1})^2\\ &\approx \sum_{i=1}^{n} F'(x_i)\cdot(x_i - x_{i-1})^2\\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\cdot(x_i - x_{i-1})^2\\ &\approx \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) \approx F(b) - F(a)\end{aligned}$$

מסביר את הסימן $\int f(x)dx$

אורכים

בהנתן $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, מהו האורך של הקו שהוא הגרף?

אורכים

בהנתן $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, מהו האורך של הקו שהוא הגרף?

נחלק $[a, b]$ באמצעות

$$x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$$

כמו קודם ונחשב

האורך $\approx$

אורכים

בהנתן $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, מהו האורך של הקו שהוא הגרף?

נחלק $[a,b]$ באמצעות

$$x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b$$

כמו קודם ונחשב

$$\text{האורך} \approx \sum_{i=1}^{n} \text{אורך הקטע ה } i$$

אורכים

בהנתן $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, מהו האורך של הקו שהוא הגרף?

נחלק $[a,b]$ באמצעות

$$x_0=a,x_1,x_2,\dots,x_n=b$$

כמו קודם ונחשב

$$\text{האורך} \approx \sum_{i=1}^{n} \text{אורך הקטע ה } i$$
$$\approx \sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(x_i-x_{i-1})^2(f'(x_i))^2}$$

אורכים

בהנתן $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, מהו האורך של הקו שהוא הגרף?

נחלק $[a,b]$ באמצעות

$$x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b$$

כמו קודם ונחשב

$$\begin{aligned} \text{האורך} &\approx \sum_{i=1}^{n} \text{אורך הקטע ה } i \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(x_i-x_{i-1})^2(f'(x_i))^2} \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f'(x_i))^2}(x_i-x_{i-1})^2 \end{aligned}$$

אורכים

בהנתן $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, מהו האורך של הקו שהוא הגרף?

נחלק $[a,b]$ באמצעות

$$x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$$

כמו קודם ונחשב

$$\begin{aligned}
\text{האורך} &\approx \sum_{i=1}^{n} \text{אורך הקטע ה } i \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-1})^2 (f'(x_i))^2} \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(x_i))^2} (x_i - x_{i-1})^2 \to \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx
\end{aligned}$$

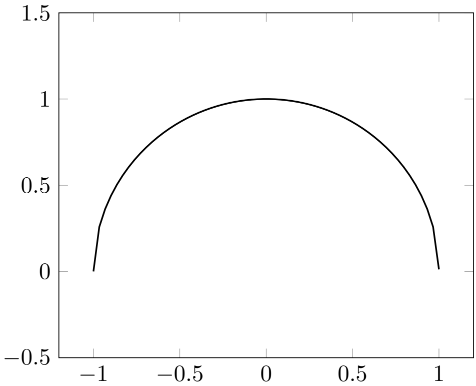
דוגמאות

תרגיל: מהו היקף מעגל ברדיוס אחד?

דוגמאות

תרגיל: מהו היקף מעגל ברדיוס אחד?

נתבונן בפונקציה $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$



דוגמאות

תרגיל: מהו היקף מעגל ברדיוס אחד?

נתבונן בפונקציה $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ונקבל שההיקף הוא שתיים כפול

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

דוגמאות

תרגיל: מהו היקף מעגל ברדיוס אחד?

נתבונן בפונקציה $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ונקבל שההיקף הוא שתיים כפול

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dx$$

דוגמאות

תרגיל: מהו היקף מעגל ברדיוס אחד?

נתבונן בפונקציה $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ונקבל שההיקף הוא שתיים כפול

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+(f'(x))^2}dx &= \int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dx\\ &= \int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx\end{aligned}$$

דוגמאות

תרגיל: מהו היקף מעגל ברדיוס אחד?

נתבונן בפונקציה $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ונקבל שההיקף הוא שתיים כפול

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1+(f'(x))^2}dx &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dx \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx \\
&\underset{x=\sin(t)}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{(\sin(t))^2}{1-(\sin(t))^2}}\cos(t)dt
\end{aligned}$$

דוגמאות

תרגיל: מהו היקף מעגל ברדיוס אחד?

נתבונן בפונקציה $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ונקבל שההיקף הוא שתיים כפול

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1+(f'(x))^2}dx &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2}dx \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}dx \\
&\underset{x=\sin(t)}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1+\frac{(\sin(t))^2}{1-(\sin(t))^2}}\cos(t)dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\cos(t)}\cos(t)dt = \pi
\end{aligned}$$

סיכום

הגדרנו $\int_a^b f(x)\,dx$ כשטח

מצאנו דרך לחשב באמצעות גבול

ראינו תכונות ודוגמאות

ראינו קשר לאינטגרל לא מסוים (אנטי-נגזרת)

ראינו כיצד לחשב אורכים

סיכום

- הקדמה
- גבולות
- רציפות
- נגזרות, קצבים וקירובים
- אינטגרלים ושטחים