מבוא להסתברות ח׳

חלק 5

אמיר יהודיוף
הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

עד כה

מרחב הסתברות

משתנים מיקריים: פונקציית הסתברות, צפיפות, התפלגות

תוחלת: בדידים ורציפים, נוסחא כללית, תוחלת של פונקציה, ליניאריות

שונות

תוחלת: "הערך הממוצע של משתנה מקרי"

איזה עוד מידע מעניין יש על משתנים מיקריים?

שונות: "מרחק ממוצע מתוחלת"

הגדרה: השונות של משתנה מקרי X היא
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$
(אם מתכנס בהחלט)

הערה: ניתן היה להגדיר $\mathbb{E}|X - \mathbb{E}(X)|$ אבל לרב לא נוח לעבוד עם ערך מוחלט

שונות

הגדרה: השונות של משתנה מקרי X היא

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

הערה: שונות תמיד אי- שלילית כי $(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq 0$ ותוחלת של משתנה מקרי אי-שלילי היא אי-שלילית

נוסחא נוספת:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2 - 2\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2\end{aligned}$$

מסקנה:

$$\mathbb{E}(X^2) \geq (\mathbb{E}(X))^2$$

(אי שיוויון קושי-שוורץ)

סטיית תקן

יחידות: אם תוחלת נמדדת ביחידות אורך, שונות נמדדת ביחידות שטח

הגדרה: סטיית התקן של משתנה מקרי X היא

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

(תזכורת: שונות תמיד אי-שלילית)

הערה: יחידות סטיית התקן הם כמו של תוחלת

דוגמאות

א. מתי שונות היא אפס?

כאשר המשתנה המקרי הוא קבוע

דוגמאות

ב. בינומי: $X \sim Bin(n,p)$

יהיו $X_1,\ldots,X_n$ משתנים $Ben(p)$ בלתי תלויים ואז $X = \sum_{i\in[n]} X_i$

נרצה לחשב $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$

ראשית,

$$(\mathbb{E}X)^2 = (pn)^2$$

שנית,

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i\in[n]} X_i\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i,j\in[n]} X_iX_j\right)$$

דוגמאות

ב. בינומי:

יהיו $X_1, \ldots, X_n$ משתנים $Ben(p)$ בלתי תלויים ויהי $X = \sum_{i\in[n]} X_i$

נרצה לחשב $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$

ראשית,
$$(\mathbb{E}X)^2 = (pn)^2$$

שנית,
$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{i,j\in[n]} X_iX_j\right) = \sum_{i\neq j\in[n]} \mathbb{E}(X_iX_j) + \sum_{i\in[n]} \mathbb{E}(X_i^2)$$
$$= \sum_{i\neq j\in[n]} p^2 + \sum_{i\in[n]} p = n(n-1)p^2 + np = (np)^2 + np(1-p)$$

לסיכום $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$

דוגמאות

ב. בינומי: אם $X \sim Bin(n, 1/2)$ אז

$$\mathbb{V}(X) = n/4$$

ו

$$\sigma_X = \sqrt{n}/2$$

ציור...

למשל אם זורקים $1,000,000$ מטבעות הוגנים אז בסיכוי גבוה מספר הפעמים שיוצא פלי הוא $500,000$ פלוס מינוס כמה אלפים (כי 500 זו סטיית תקן)

דוגמאות

ג. גיאומטרי: מהי שונות $X \sim Geom(p)$?

ראשית,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(X-1)) &\underset{q=1-p}{=} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-1}p = pq\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} \\
&= pq\frac{d^2}{(dq)^2}\left[\sum_{k=2}^{\infty} q^k\right] = pq\frac{d^2}{(dq)^2}\left[\frac{q^2}{1-q}\right] \\
&= pq\frac{2}{(1-q)^3} = p(1-p)\frac{2}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p^2}
\end{aligned}
$$

דוגמאות

ג. גיאומטרי: מהי שונות $X \sim Geom(p)$?

ראשית,

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

לכן

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2$$
$$= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

תכונות השונות

תרגילים:

א. קבועה בהזזות: לכל משתנה מקרי X ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{V}(\alpha + X) = \mathbb{V}(X)$$

ב. הומגניות מסדר שתיים: לכל משתנה מקרי X ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{V}(\alpha X) = \alpha^2 \mathbb{V}(X)$$

הערה: נכון רק אם מוגדר

דוגמאות רציפות

א. אחיד: עבור $X \sim U([a,b])$ מתקיים

$$\mathbb{E}X^2 = \int_a^b \frac{y^2}{b-a}dy = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

ולכן

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

דוגמאות רציפות

ב. מעריכי: עבור $X \sim Exp(\lambda)$ מתקיים $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

הערה: סטיית תקן ותוחלת שווים ולכן משתנה מיקרי לא מרוכז

דוגמאות רציפות

ג. נורמלי: עבור $X \sim N(0,1)$ מתקיים

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2/2} \cdot y dy \\ &\underset{parts}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{y^2/2} \cdot y \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right] = 1\end{aligned}$$

ולכן עבור $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ מכיוון ש $Z = \sigma X + \mu$ נקבל

$$\mathbb{V}(Z) = \sigma^2 \mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

סיכום ביניים

מרחב הסתברות

משתנים מיקריים

תוחלת

שונות: מרחק ממוצע מתוחלת, מדד לריכוז, דוגמאות

הערכות פשוטות

בהרבה מקרים נתעניין בהערכת הסתברות של מאורעות מסוימים (למשל, מה לכל היותר הסיכוי שסקר לא משקף)

משפט (אי-שיוויון מרקוב): אם X משתנה מקרי אי-שלילי עם תוחלת סופית, אז לכל $\alpha > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}[X \geq \alpha\mathbb{E}(X)] \leq \frac{1}{\alpha}$$

הוכחה: ניתן להניח ש $\alpha > 1$, $\mathbb{P}[X \geq \alpha\mathbb{E}(X)] > 0$ ו $\mathbb{E}(X) > 0$ (אחרת המשפט נכון).
לכן

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{P}[X \geq \alpha\mathbb{E}(X)] \cdot \mathbb{E}[X|X \geq \alpha\mathbb{E}(X)] + \mathbb{P}[X < \alpha\mathbb{E}(X)] \cdot \mathbb{E}[X|X < \alpha\mathbb{E}(X)] \\ &\underset{X\geq 0}{\geq} \mathbb{P}[X \geq \alpha\mathbb{E}(X)] \cdot \mathbb{E}[X|X \geq \alpha\mathbb{E}(X)] \geq \mathbb{P}[X \geq \alpha\mathbb{E}(X)] \cdot \alpha\mathbb{E}(X)\end{aligned}$$

הערכות פשוטות

משפט (אי-שיוויון צ׳בישב): אם X משתנה מקרי עם תוחלת ושונות סופיים, אז לכל $\alpha > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha\sigma_x] \leq \frac{1}{\alpha^2}$$

הוכחה: נגדיר משתנה מקרי אי-שלילי עם תוחלת סופית $Y = |X - \mathbb{E}(X)|$

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha\sigma_x] = \mathbb{P}\left[|Y| \geq \alpha\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}\right]$$

$$= \mathbb{P}[Y^2 \geq \alpha^2\mathbb{E}(Y^2)] \underset{\text{Markov for } Y^2}{\leq} \frac{1}{\alpha^2}$$

דוגמא

ריכוז של בינומי (מליון מטבעות הוגנים): אם $X \sim Bin(10^6, 1/2)$ אז

$$\mathbb{E}(X) = 500,000 \ , \ \ \mathbb{V}(X) = 250,000 \ , \ \ \sigma_X = 500$$

ולכן

$$\mathbb{P}\left[|X - 500,000| \geq 5,000\right] \leq \frac{1}{100}$$

בהמשך: נקבל הערכה טובה בהרבה

קמירות

ראינו

$$(\mathbb{E}(X))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$$

הודות לקמירות

הגדרה: הפונקציה h היא קמורה אם לכל a, b בתחום הגדרתה ולכל $\lambda \in [0, 1]$ מתקיים

$$h(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \lambda h(a) + (1-\lambda) h(b)$$

בנוסף:

* לכל $a < b$ קטע הישר בין $(a, h(a))$ ל $(b, h(b))$ נמצא מעל הגרף (ציור)

* $h'' \geq 0$ במידה והיא גזירה פעמיים

קמירות

משפט: אם X משתנה מקרי ו h פונקציה קמורה המוגדרת על קטע המכיל את הערכים ש X מקבל, אז

$$\mathbb{E}(h(X)) \geq h(\mathbb{E}(X))$$

הסבר:

א. אם X מקבל שני ערכים a, b, נסמן $\lambda = \mathbb{P}[X = a]$ ונקבל

$$\mathbb{E}(h(X)) = \lambda h(a) + (1 - \lambda)h(b) \geq h(\lambda a + (1 - \lambda)b) = h(\mathbb{E}(X))$$

ב. אם X מקבל מספר סופי של ערכים: באינדוקציה (תרגיל)

ג. קירוב משתנה מקרי כללי על ידי משתנה מקרי המקבל מספר סופי של ערכים

דוגמא

ריבית בנקאית: שתי אפשרויות לפיקדון של 1000 ש״ח למשך שלוש שנים

א. ריבית שנתית של $X \sim U([0,10])$ אחוזים, $\mathbb{E}(X) = 5$

ב. ריבית שנתית בטוחה של 5 אחוזים

שווי בסוף תקופה באפשרות א: $h(X) = 1000\left(1 + \frac{X}{100}\right)^3$

שווי בסוף תקופה באפשרות ב: $h(\mathbb{E}(X))$

נשים לב כי $h'' > 0$ בתחום המתאים ולכן $\mathbb{E}(h(X)) > h(\mathbb{E}(X))$

כלומר, מבחינת תוחלת, אפשרות א עדיפה

סיכום ביניים

מרחב הסתברות

משתנים מיקריים: תוחלת, שונות

קמירות

מומנטים

ראינו תוחלת ושונות ודיברנו של חשיבות שלהם

נוכל לקבל מידע חשוב גם מחזקות גבוהות יותר

הגדרה: המומנט הnי של משתנה מקרי X הוא

$$\mathbb{E}(X^n)$$

והמומנט המוחלט הוא

$$\mathbb{E}(|X|^n)$$

(מוגדרים רק אם מתכנסים בהחלט)

אבחנה: אם $n < m < 0$ ו $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$ אז $\mathbb{E}(|X|^m) < \infty$

כי $|\xi|^m \leq 1 + |\xi|^n$ לכל ξ ממשי

פונקציה יוצרת מומנטים

ניתן לתאר כל המומנטים על ידי פונקציה אחת

הגדרה: פונקציה יוצרת מומנטים של משתנה מקרי X היא

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$$

(לא תמיד מוגדרת לכל ממשי (טרנספורם לפלאס))

מקור השם:

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbb{E}(X^k)$$

כלומר ניתן לשחזר כל המומנטים מפונקציה:

$$M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n)$$

כאשר $h^{(n)}$ זו הנגזרת הnית של h

דוגמאות

א. בינומי: עבור $X \sim Bin(n, p)$ מתקיים

$$M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{tk} = \left(1 - p + pe^t\right)^n$$

ב. פואסוני: עבור $X \sim Pois(\lambda)$ מתקיים

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} e^{tk} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda e^t - \lambda}$$

דוגמאות

ג. נורמלי תיקני: עבור $X \sim N(0,1)$ מתקיים

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} e^{ty} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2+ty-t^2/2+t^2/2} dy \\ &= \frac{e^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-t)^2/2} dy = e^{t^2/2} \end{aligned}$$

לכן

$$\mathbb{E}(X) = M_X^{(1)}(0) = \left. te^{t^2/2} \right|_{t=0} = 0$$

$$\mathbb{E}(X^2) = M_X^{(2)}(0) = \left. e^{t^2/2}(1+t^2) \right|_{t=0} = 1$$

$$\mathbb{E}(X^3) = M_X^{(3)}(0) = \left. e^{t^2/2}(t(1+t^2)+2t) \right|_{t=0} = 0$$

פונקציה יוצרת מומנטים והתפלגות

ניתן לשחזר התפלגות מפונקציה יוצרת מומנטים

סימון: עבור משתנה מקרי X נסמן ב T_X את קבוצת הtים עבורם $M_X(t)$ מוגדרת

אבחנה: $T_X \ni 0$ כי $M_X(0) = 1$

משפט: יהיו X, Y משתנים מקריים כך ש T_X, T_Y מכילות סביבה פתוחה של אפס. אם $M_X = M_Y$ אז

$$F_X = F_Y$$

פונקציה אופיינית

פונקציה יוצרת מומנטים לא תמיד מתכנסת. נרצה להגדיר פונקציה דומה שתתכנס תמיד (טרנספורם פורייה).

הגדרה: הפונקציה האופיינית של המשתנה המקרי X היא

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right)$$

(כאשר i הוא שורש של מינוס אחת)

הערות:

א. פונקציה מרוכבת של משתנה ממשי
ב. תמיד מתכנס בהחלט כי $\left|e^{itX}\right| = 1$
ג. אין לבלבל בין $\Phi_X(t)$ ל $M_X(it)$
ד. ניתן לקבל נוסחאות דומות למומנטים
ה. ניתן לשחזר F_X מ Φ_X ועל כן השם (נשתמש בהמשך)

סיכום ביניים

מרחב הסתברות

משתנים מיקריים: תוחלת, שונות

קמירות

מומנטים, פונקציה יוצרת ופונקציה אופיינית