מתמטיקה למדעי החיים

אינטגרלים

אמיר יהודיוף

הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

פונקציות קדומות

הגדרנו נגזרת כפעולה שלוקחת פונקציה f והופכת אותה לפונקציה f' (אם אפשר)

עתה נתבונן בפעולה ההפוכה שמעתיקה f' לפונקציה קדומה שלה f

הגדרה: בהנתן $f(x)$ האינטגרל הלא מסוים שלה

$$F(x) = \int f(x)dx$$

היא פונקציה כך ש $F'(x) = f(x)$ (למעשה משפחת פונקציות)

משמעות הסימון תתברר בהמשך

דוגמאות

$$F(x) = \int f(x)dx \;\Rightarrow\; F'(x) = f(x)$$

1. $\int 0 dx =$
2.
3.
4.
5.
6.

דוגמאות

$$F(x) = \int f(x)dx \;\Rightarrow\; F'(x) = f(x)$$

1. $\int 0 dx = c$
2.
3.
4.
5.
6.

דוגמאות

$$F(x) = \int f(x)dx \;\Rightarrow\; F'(x) = f(x)$$

1. $\int 0 dx = c$
2. $\int 1 dx =$
3.
4.
5.
6.

דוגמאות

$$F(x) = \int f(x)dx \;\Rightarrow\; F'(x) = f(x)$$

1. $\int 0dx = c$
2. $\int 1dx = x + c$
3.
4.
5.
6.

דוגמאות

$$F(x) = \int f(x)dx \ \Rightarrow \ F'(x) = f(x)$$

1. $\int 0dx = c$
2. $\int 1dx = x + c$
3. $\int xdx =$
4.
5.
6.

דוגמאות

$$F(x) = \int f(x)dx \;\Rightarrow\; F'(x) = f(x)$$

1. $\int 0dx = c$
2. $\int 1dx = x + c$
3. $\int xdx = \frac{x^2}{2} + c$
4.
5.
6.

דוגמאות

$$F(x) = \int f(x)dx \;\Rightarrow\; F'(x) = f(x)$$

1. $\int 0 dx = c$
2. $\int 1 dx = x + c$
3. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$
4. $\int \sqrt{x} dx =$
5.
6.

דוגמאות

$$F(x) = \int f(x)dx \;\Rightarrow\; F'(x) = f(x)$$

1. $\int 0dx = c$
2. $\int 1dx = x + c$
3. $\int xdx = \frac{x^2}{2} + c$
4. $\int \sqrt{x}dx = \frac{2x^{3/2}}{3} + c$
5.
6.

דוגמאות

$$F(x) = \int f(x)dx \;\Rightarrow\; F'(x) = f(x)$$

1. $\int 0 dx = c$
2. $\int 1 dx = x + c$
3. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$
4. $\int \sqrt{x} dx = \frac{2x^{3/2}}{3} + c$
5. $\int e^x dx =$
6.

דוגמאות

$$F(x) = \int f(x)dx \;\Rightarrow\; F'(x) = f(x)$$

1. $\int 0dx = c$
2. $\int 1dx = x + c$
3. $\int xdx = \frac{x^2}{2} + c$
4. $\int \sqrt{x}dx = \frac{2x^{3/2}}{3} + c$
5. $\int e^x dx = e^x + c$
6.

דוגמאות

$$F(x) = \int f(x)dx \;\Rightarrow\; F'(x) = f(x)$$

1. $\int 0 dx = c$

2. $\int 1 dx = x + c$

3. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$

4. $\int \sqrt{x} dx = \frac{2x^{3/2}}{3} + c$

5. $\int e^x dx = e^x + c$

6. $*$ $\int \frac{1}{x} dx =$

דוגמאות

$$F(x) = \int f(x)dx \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

1. $\int 0dx = c$
2. $\int 1dx = x + c$
3. $\int xdx = \frac{x^2}{2} + c$
4. $\int \sqrt{x}dx = \frac{2x^{3/2}}{3} + c$
5. $\int e^x dx = e^x + c$
6. * $\int \frac{1}{x}dx = \ln(|x|) + c$

סכומים

משפט: אם ל f, g יש אינטרגל אז לכל שני קבועים a, b

$$\int af(x) + bg(x)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

סכומים

משפט: אם ל f, g יש אינטרגל אז לכל שני קבועים a, b

$$\int af(x) + bg(x)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

הסבר: $af + bg = aF' + bG' = (aF + bG)'$

סכומים

משפט: אם ל f, g יש אינטרגל אז לכל שני קבועים a, b

$$\int af(x) + bg(x)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

הסבר: $af + bg = aF' + bG' = (aF + bG)'$

דוגמאות:

א. $\int x + 1dx = \frac{x^2}{2} + x + c$

סכומים

משפט: אם ל f, g יש אינטרגל אז לכל שני קבועים a, b

$$\int af(x) + bg(x)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

הסבר: $af + bg = aF' + bG' = (aF + bG)'$

דוגמאות:

א. $\int x + 1dx = \frac{x^2}{2} + x + c$

ב. $\int e^x + \frac{1}{\cos^2(x)}dx = e^x + \tan(x) + c$

חלקים

שאלה: $\int f(x)g(x)dx = ?$

חלקים

שאלה: $\int f(x)g(x)dx = ?$

נתחיל בנגזרת של מכפלה: $(F(x) \cdot G(x))' = F'(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot G'(x)$

כש F, G פונקציות קדומות של f, g

חלקים

שאלה: $\int f(x)g(x)dx = ?$

נתחיל בנגזרת של מכפלה: $(F(x) \cdot G(x))' = F'(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot G'(x)$

כש F, G פונקציות קדומות של f, g

נעשה אינטגרל לשני הצדדים:

$$F(x) \cdot G(x) = \int F'(x) \cdot G(x)dx + \int F(x) \cdot G'(x)dx$$

חלקים

שאלה: $\int f(x)g(x)dx = ?$

נתחיל בנגזרת של מכפלה: $(F(x)\cdot G(x))' = F'(x)\cdot G(x) + F(x)\cdot G'(x)$

כש F, G פונקציות קדומות של f, g

נעשה אינטגרל לשני הצדדים:

$$F(x)\cdot G(x) = \int F'(x)\cdot G(x)dx + \int F(x)\cdot G'(x)dx$$

נעביר אגפים:

$$\int F'(x)\cdot G(x)dx = F(x)\cdot G(x) - \int F(x)\cdot G'(x)dx$$

חלקים

שאלה: $\int f(x)g(x)dx = ?$

נתחיל בנגזרת של מכפלה: $(F(x)\cdot G(x))' = F'(x)\cdot G(x) + F(x)\cdot G'(x)$

כש F, G פונקציות קדומות של f, g

נעשה אינטגרל לשני הצדדים:

$$F(x)\cdot G(x) = \int F'(x)\cdot G(x)dx + \int F(x)\cdot G'(x)dx$$

נעביר אגפים:

$$\int F'(x)\cdot G(x)dx = F(x)\cdot G(x) - \int F(x)\cdot G'(x)dx$$

נחליף סימנים:

$$\int f(x)\cdot G(x)dx = F(x)\cdot G(x) - \int F(x)\cdot g(x)dx$$

דוגמאות

$$\int f(x) \cdot G(x)dx = F(x) \cdot G(x) - \int F(x) \cdot g(x)dx$$

$$\int x \ln(x)dx =$$

דוגמאות

$$\int f(x)\cdot G(x)dx = F(x)\cdot G(x) - \int F(x)\cdot g(x)dx$$

$$\int x\ln(x)dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$$

דוגמאות

$$\int f(x) \cdot G(x) dx = F(x) \cdot G(x) - \int F(x) \cdot g(x) dx$$

$$\begin{aligned}\int x \ln(x) dx &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x}{2} dx\end{aligned}$$

דוגמאות

$$\int f(x)\cdot G(x)dx = F(x)\cdot G(x) - \int F(x)\cdot g(x)dx$$

$$\begin{aligned}\int x\ln(x)dx &= \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\\ &= \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \int\frac{x}{2}dx\\ &= \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \frac{x^2}{4} + c\end{aligned}$$

דוגמאות

$$\int f(x)\cdot G(x)dx = F(x)\cdot G(x) - \int F(x)\cdot g(x)dx$$

$$\begin{aligned}\int x\ln(x)dx &= \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\\ &= \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \int \frac{x}{2}dx\\ &= \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \frac{x^2}{4} + c\end{aligned}$$

$$\left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right)' = x\ln(x) + \frac{x^2}{2}\frac{1}{x} - \frac{x}{2} = x\ln(x)$$

דוגמאות

$$\int f(x) \cdot G(x)dx = F(x) \cdot G(x) - \int F(x) \cdot g(x)dx$$

$$\int \ln(x)dx =$$

דוגמאות

$$\int f(x) \cdot G(x) dx = F(x) \cdot G(x) - \int F(x) \cdot g(x) dx$$

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx$$

דוגמאות

$$\int f(x)\cdot G(x)dx = F(x)\cdot G(x) - \int F(x)\cdot g(x)dx$$

$$\begin{aligned}\int \ln(x)dx &= \int 1\cdot \ln(x)dx \\ &= x\cdot \ln(x) - \int x\cdot \frac{1}{x}dx\end{aligned}$$

דוגמאות

$$\int f(x) \cdot G(x) dx = F(x) \cdot G(x) - \int F(x) \cdot g(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= \int 1 \cdot \ln(x) dx \\ &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cdot \ln(x) - \int 1 dx \end{aligned}$$

דוגמאות

$$\int f(x)\cdot G(x)dx = F(x)\cdot G(x) - \int F(x)\cdot g(x)dx$$

$$\begin{aligned}
\int \ln(x)dx &= \int 1\cdot \ln(x)dx \\
&= x\cdot \ln(x) - \int x\cdot \frac{1}{x}dx \\
&= x\cdot \ln(x) - \int 1dx \\
&= x\cdot \ln(x) - x + c
\end{aligned}$$

דוגמאות

$$\int f(x)\cdot G(x)dx = F(x)\cdot G(x) - \int F(x)\cdot g(x)dx$$

$$\begin{aligned}\int \ln(x)dx &= \int 1\cdot \ln(x)dx \\ &= x\cdot\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= x\cdot\ln(x) - \int 1dx \\ &= x\cdot\ln(x) - x + c\end{aligned}$$

$$(x\ln(x) - x)' = \ln(x) + x\frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$$

דוגמאות

$$\int f(x) \cdot G(x) dx = F(x) \cdot G(x) - \int F(x) \cdot g(x) dx$$

$$\int \cos(x) \cdot x dx =$$

דוגמאות

$$\int f(x) \cdot G(x) dx = F(x) \cdot G(x) - \int F(x) \cdot g(x) dx$$

$$\int \cos(x) \cdot x dx = \sin(x) \cdot x - \int \sin(x) \cdot 1 dx$$

דוגמאות

$$\int f(x)\cdot G(x)dx = F(x)\cdot G(x) - \int F(x)\cdot g(x)dx$$

$$\begin{aligned}\int \cos(x)\cdot x dx &= \sin(x)\cdot x - \int \sin(x)\cdot 1 dx \\ &= \sin(x)\cdot x + \cos(x) + c\end{aligned}$$

דוגמאות

$$\int f(x) \cdot G(x) dx = F(x) \cdot G(x) - \int F(x) \cdot g(x) dx$$

$$\int \cos(x) \cdot x dx = \sin(x) \cdot x - \int \sin(x) \cdot 1 dx$$
$$= \sin(x) \cdot x + \cos(x) + c$$

$$(\sin(x) \cdot x + \cos(x))' = \cos(x) \cdot x + \sin(x) - \sin(x) = \cos(x) \cdot x$$

חלקים

נוסחת אינטגרציה בחלקים:

$$\int f(x)\cdot G(x)dx = F(x)\cdot G(x) - \int F(x)\cdot g(x)dx$$

א. עוזר בחישוב אינטגרלים

ב. ניתן לבדוק נכונות בקלות על ידי גזירה

ג. המון מקרים שונים

הצבה

משפט: אם ל $f(x)$ יש אינטגרל ו $g(x)$ גזירה אז

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

(ההצבה היא $t = g(x)$)

הצבה

משפט: אם ל $f(x)$ יש אינטגרל ו $g(x)$ גזירה אז

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

(ההצבה היא $t = g(x)$)

הסבר: מכלל שרשרת

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

הצבה

משפט: אם ל $f(x)$ יש אינטגרל ו $g(x)$ גזירה אז

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

(ההצבה היא $t = g(x)$)

הסבר: מכלל שרשרת

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

לכן

$$\int f(t)dt = F(t) = F(g(x)) = \int f(g(x))g'(x)dx$$

דוגמאות

תרגיל: $\int (2x+2)e^{x^2+2x+3}\,dx = ?$

דוגמאות

תרגיל: $\int (2x+2)e^{x^2+2x+3}dx = ?$

$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, \quad t = g(x)$

החלפת משתנה: נגדיר $t = g(x) = x^2 + 2x + 3$, נחשב

$$g'(x) = 2x + 2$$

ונציב

$$\int (2x+2)e^{x^2+2x+3}dx = \int g'(x)e^{g(x)}dx$$

דוגמאות

תרגיל: $\int (2x+2)e^{x^2+2x+3}dx = ?$

$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, \quad t = g(x)$

החלפת משתנה: נגדיר $t = g(x) = x^2 + 2x + 3$, נחשב

$$g'(x) = 2x + 2$$

ונציב

$$\begin{aligned}\int (2x+2)e^{x^2+2x+3}dx &= \int g'(x)e^{g(x)}dx \\ &= \int e^t dt\end{aligned}$$

דוגמאות

תרגיל: $\int (2x+2)e^{x^2+2x+3}dx = ?$

$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, \quad t = g(x)$

החלפת משתנה: נגדיר $t = g(x) = x^2+2x+3$, נחשב

$$g'(x) = 2x+2$$

ונציב

$$\int (2x+2)e^{x^2+2x+3}dx = \int g'(x)e^{g(x)}dx$$
$$= \int e^t dt$$
$$= e^t + c$$

דוגמאות

תרגיל: $\int (2x+2)e^{x^2+2x+3}dx =?$

$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt, \quad t = g(x)$

החלפת משתנה: נגדיר $t = g(x) = x^2 + 2x + 3$, נחשב

$$g'(x) = 2x + 2$$

ונציב

$$\begin{aligned}\int (2x+2)e^{x^2+2x+3}dx &= \int g'(x)e^{g(x)}dx \\ &= \int e^t dt \\ &= e^t + c = e^{x^2+2x+3} + c\end{aligned}$$

דוגמאות

תרגיל: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$

דוגמאות

תרגיל: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =?$

$$\int f(t)dt = \int f(g(x))g'(x)dx, \quad t = g(x)$$

החלפת משתנה: נגדיר $t = g(x) = \sin(x)$, נחשב

$$g'(x) = \cos(x)$$

ונציב

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

דוגמאות

תרגיל: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =?$

$$\int f(t)dt = \int f(g(x))g'(x)dx, \quad t = g(x)$$

החלפת משתנה: נגדיר $t = g(x) = \sin(x)$, נחשב

$$g'(x) = \cos(x)$$

ונציב

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} \cos(x) dx$$

דוגמאות

תרגיל: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = ?$

$\int f(t)dt = \int f(g(x))g'(x)dx, \quad t = g(x)$

החלפת משתנה: נגדיר $t = g(x) = \sin(x)$, נחשב

$$g'(x) = \cos(x)$$

ונציב

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}\cos(x)dx$$
$$= \int 1dx$$

דוגמאות

תרגיל: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$

$$\int f(t)dt = \int f(g(x))g'(x)dx, \quad t = g(x)$$

החלפת משתנה: נגדיר $t = g(x) = \sin(x)$, נחשב

$$g'(x) = \cos(x)$$

ונציב

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} \cos(x) dx \\ &= \int 1 dx \\ &= x + c = \sin^{-1}(t) + c \end{aligned}$$

דוגמאות

תרגיל: $\int \frac{1}{(4+x^2)^{3/2}} dx = ?$

דוגמאות

תרגיל: $\int \frac{1}{(4+x^2)^{3/2}} dx =?$

$\int f(t)dt = \int f(g(x))g'(x)dx, \quad t = g(x)$

החלפת משתנה: נגדיר $t = g(x) = 2\tan(x)$ ונשים לב $g'(x) = \frac{2}{\cos^2(x)}$ ונציב

$$\int \frac{1}{(4+t^2)^{3/2}} dt = \int \frac{1}{(4+(2\tan(x))^2)^{3/2}} \frac{2}{\cos^2(x)} dx$$

דוגמאות

תרגיל: $\int \frac{1}{(4+x^2)^{3/2}}dx = ?$

$\int f(t)dt = \int f(g(x))g'(x)dx, \quad t = g(x)$

החלפת משתנה: נגדיר $t = g(x) = 2\tan(x)$ ונשים לב $g'(x) = \frac{2}{\cos^2(x)}$ ונציב

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(4+t^2)^{3/2}}dt &= \int \frac{1}{(4+(2\tan(x))^2)^{3/2}}\frac{2}{\cos^2(x)}dx \\ &= \int \frac{1}{(4(1+\tan^2(x)))^{3/2}}\frac{2}{\cos^2(x)}dx\end{aligned}$$

דוגמאות

תרגיל: $\int \frac{1}{(4+x^2)^{3/2}}dx = ?$

$$\int f(t)dt = \int f(g(x))g'(x)dx, \quad t = g(x)$$

החלפת משתנה: נגדיר $t = g(x) = 2\tan(x)$ ונשים לב $g'(x) = \frac{2}{\cos^2(x)}$ ונציב

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(4+t^2)^{3/2}}dt &= \int \frac{1}{(4+(2\tan(x))^2)^{3/2}} \frac{2}{\cos^2(x)}dx \\
&= \int \frac{1}{(4(1+\tan^2(x)))^{3/2}} \frac{2}{\cos^2(x)}dx \\
&= \int \frac{1}{(4/\cos^2(x))^{3/2}} \frac{2}{\cos^2(x)}dx
\end{aligned}$$

דוגמאות

תרגיל: $\int \frac{1}{(4+x^2)^{3/2}} dx = ?$

$\int f(t)dt = \int f(g(x))g'(x)dx, \quad t = g(x)$

החלפת משתנה: נגדיר $t = g(x) = 2\tan(x)$ ונשים לב $g'(x) = \frac{2}{\cos^2(x)}$ ונציב

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(4+t^2)^{3/2}} dt &= \int \frac{1}{(4+(2\tan(x))^2)^{3/2}} \frac{2}{\cos^2(x)} dx \\
&= \int \frac{1}{(4(1+\tan^2(x)))^{3/2}} \frac{2}{\cos^2(x)} dx \\
&= \int \frac{1}{(4/\cos^2(x))^{3/2}} \frac{2}{\cos^2(x)} dx \\
&= \int \frac{2}{8} \cos(x) dx
\end{aligned}$$

דוגמאות

תרגיל: $\int \frac{1}{(4+x^2)^{3/2}} dx = ?$

$$\int f(t)dt = \int f(g(x))g'(x)dx, \quad t = g(x)$$

החלפת משתנה: נגדיר $t = g(x) = 2\tan(x)$ ונשים לב $g'(x) = \frac{2}{\cos^2(x)}$ ונציב

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(4+t^2)^{3/2}} dt &= \int \frac{1}{(4+(2\tan(x))^2)^{3/2}} \frac{2}{\cos^2(x)} dx \\
&= \int \frac{1}{(4(1+\tan^2(x)))^{3/2}} \frac{2}{\cos^2(x)} dx \\
&= \int \frac{1}{(4/\cos^2(x))^{3/2}} \frac{2}{\cos^2(x)} dx \\
&= \int \frac{2}{8} \cos(x) dx \\
&= \frac{\sin(x)}{4} + c
\end{aligned}$$

דוגמאות

תרגיל: $\int \frac{1}{(4+x^2)^{3/2}} dx = ?$

$\int f(t)dt = \int f(g(x))g'(x)dx, \quad t = g(x)$

החלפת משתנה: נגדיר $t = g(x) = 2\tan(x)$ ונשים לב $g'(x) = \frac{2}{\cos^2(x)}$ ונציב

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(4+t^2)^{3/2}} dt &= \int \frac{1}{(4+(2\tan(x))^2)^{3/2}} \frac{2}{\cos^2(x)} dx \\
&= \int \frac{1}{(4(1+\tan^2(x)))^{3/2}} \frac{2}{\cos^2(x)} dx \\
&= \int \frac{1}{(4/\cos^2(x))^{3/2}} \frac{2}{\cos^2(x)} dx \\
&= \int \frac{2}{8} \cos(x) dx \\
&= \frac{\sin(x)}{4} + c \underset{draw[2,t,\angle = x]}{=} \frac{1}{4} \frac{t}{\sqrt{4-t^2}} + c
\end{aligned}$$

הצבה

משפט: אם ל $f(x)$ יש אינטגרל ו $g(x)$ גזירה אז

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

כאשר $t = g(x)$

א. עוזר בחישוב

ב. הצבות טריגונומטריות:

i. $\sqrt{a^2 - x^2} \leftarrow a\sin(x)$

ii. $\sqrt{x^2 - a^2} \leftarrow a/\cos(x)$

iii. $\sqrt{x^2 + a^2} \leftarrow a\tan(x)$

ג. לזכור לחזור בסוף למשתנה הראשוני

פונקציות רציונליות

תרגיל: $\int \frac{x^2}{x^3-1}dx = ?$

פונקציות רציונליות

תרגיל: $\int \frac{x^2}{x^3-1}dx = ?$

פתרון:

$$\int f(t)dt = \int f(g(x))g'(x)dx, \quad t = g(x)$$

נציב $t = g(x) = x^3 - 1$ ו $g'(x) = 3x^2$ ונקבל

$$\int \frac{x^2}{x^3-1}dx = \int \frac{1}{3}\frac{g'(x)}{g(x)}dx$$

פונקציות רציונליות

תרגיל: $\int \frac{x^2}{x^3-1} dx = ?$

פתרון:

$$\int f(t)dt = \int f(g(x))g'(x)dx, \quad t = g(x)$$

נציב $t = g(x) = x^3 - 1$ ו $g'(x) = 3x^2$ ונקבל

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^3-1} dx &= \int \frac{1}{3} \frac{g'(x)}{g(x)} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{g(x)} g'(x) dx\end{aligned}$$

פונקציות רציונליות

תרגיל: $\int \frac{x^2}{x^3-1}dx = ?$

פתרון:

$$\int f(t)dt = \int f(g(x))g'(x)dx, \quad t = g(x)$$

נציב $t = g(x) = x^3 - 1$ ו $g'(x) = 3x^2$ ונקבל

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{x^3-1}dx &= \int \frac{1}{3}\frac{g'(x)}{g(x)}dx \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{g(x)}g'(x)dx \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}dt
\end{aligned}$$

פונקציות רציונליות

תרגיל: $\int \frac{x^2}{x^3-1}dx = ?$

פתרון:

$\int f(t)dt = \int f(g(x))g'(x)dx, \quad t = g(x)$

נציב $t = g(x) = x^3 - 1$ ו $g'(x) = 3x^2$ ונקבל

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{x^3-1}dx &= \int \frac{1}{3}\frac{g'(x)}{g(x)}dx \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{g(x)}g'(x)dx \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{t}dt \\
&= \frac{1}{3}\ln(|t|) + c = \frac{1}{3}\ln(|x^3-1|) + c
\end{aligned}$$

סיכום

הגדרנו $\int f(x)\,dx$ כפעולה ההפוכה לנגזרת

ראינו דוגמאות וכלים לחישוב:

- חלקים

- הצבה

- פונקציות רציונליות

גם אם קשה לחשב, יחסית קל לבדוק