מבוא להסתברות ח'

חלק 4

אמיר יהודיוף
הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

עד כה

מרחב הסתברות

משתנים מיקריים: פונקציית הסתברות וצפיפות

פונקציית התפלגות ופירוק משתנים מיקריים (כלליים)

פונקציות של משתנים מיקריים

תוחלת

כמות בסיסית של משתנה מיקרי: הערך הממוצע שלו

הגדרה: יהי X משתנה מקרי בדיד. תוחלתו היא
$$\mathbb{E}X = \sum_a \mathbb{P}(X = a) \cdot a$$
מוגדרת רק אם סכום מתכנס בהחלט: $\sum_a \mathbb{P}(X = a) \cdot |a| < \infty$

דוגמאות

א. קבוע: אם $X=c$ בסיכוי אחד אז $\mathbb{E}X=c$

ב. ברנולי: אם $X\sim Ber(p)=Bin(1,p)$ אז

$$\mathbb{E}X=\mathbb{P}(X=1)\cdot 1+\mathbb{P}(X=0)\cdot 0=p$$

ג. בינומי: אם $X\sim Bin(n,p)$ אז

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\cdot k=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}\\&=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}=np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^{k+1}(1-p)^{n-1-k}\\&=np(p+1-p)^{n-1}=np\end{aligned}$$

דוגמאות

ד. גיאומטרי:

אם $p = 1/2$, כמה זמן עד הצלחה?

אם $p = 1/3$, כמה זמן עד הצלחה?

באופן כללי:

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p\cdot k \underset{q=p-1}{=} p\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}k = p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d}{dq}q^k$$

$$= p\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty}q^k = p\frac{d}{dq}q\sum_{k=0}^{\infty}q^k = p\frac{d}{dq}\frac{q}{1-q}$$

$$= p\frac{1-q-(-1)q}{(1-q)^2} = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

דוגמאות

ה. פואסוני: $X \sim Pois(\lambda)$

תרגיל:

$$\mathbb{E}X = \lambda$$

דוגמאות

ו. משתנה מקרי X המוגדר על ידי: לכל $k \in \{1, 2, 3, \ldots, \}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X = k) = c\frac{1}{k^2}$$

המספר c הוא רק קבוע נרמול $c = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$

ומתקיים

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k^2} \cdot k = \infty$$

כלומר תוחלת לא מוגדרת

דיון

שתי אפשרויות להשקעה של X ש״ח:

א. השארת הכסף בחשבון: בכל שנה הפסד של אחוז אחד

$$X_0 = X, \quad X_t = 0.99X_{t-1}$$

כאשר X_t מייצג כמות כסף אחרי t שנים

ב. השקעה: בכל שנה בסיכוי חצי פי 2 ובסיכוי חצי נשארים עם 6 אחוזים מכסף

$$X_t = \begin{cases} 2X_{t-1} & \textit{with probability } 0.5 \\ 0.06X_{t-1} & \textit{with probability } 0.5 \end{cases}$$

תוחלות:

א. $\mathbb{E}X_1 = 0.99X_0$

ב. $\mathbb{E}X_1 = (1/2)2X_0 + (1/2)0.06X_0 = 1.03X_0$

מסקנה: מבחינת תוחלת אפשרות ב עדיפה

דיון

שתי אפשרויות להשקעה של X ש״ח:

א. השארת הכסף בחשבון: בכל שנה הפסד של אחוז אחד

ב. השקעה: בכל שנה בסיכוי חצי פי 2 ובסיכוי חצי נשארים עם 6 אחוזים מכסף

תוחלות:

א. $\mathbb{E}X_1 = 0.99X_0$

ב. $\mathbb{E}X_1 = (1/2)2X_0 + (1/2)0.06X_0 = 1.03X_0$

כלומר לכל $t \geq 0$

א. $\mathbb{E}X_t = 0.99X_{t-1} = \ldots = 0.99^t X_0$

ב. $\mathbb{E}X_t = 1.03^t X_0$

דיון

שתי אפשרויות להשקעה של X ש"ח:
א. השארת הכסף בחשבון: בכל שנה הפסד של אחוז אחד
ב. השקעה: בכל שנה בסיכוי חצי פי 2 ובסיכוי חצי נשארים עם 6 אחוזים מכסף

תוחלות: לכל $t \geq 0$
א. $\mathbb{E}X_t = 0.99X_{t-1} = \ldots = 0.99^t X_0$
ב. $\mathbb{E}X_t = 1.03^t X_0$

אחרי 20 שנה, בתוחלת, אפשרות א משאירה 81 אחוז מכסף ובאפשרות ב מקבלים 181 אחוז

אבל: מה יקרה בהסתברות גבוהה באפשרות ב?
בסיכוי $1 - 0.5^{20} = 0.999\ldots$ נפסיד לפחות פעם אחת
ואז בסוף תקופה נשאר עם לכל היותר $1.03^{19} \cdot 0.06 = 0.105\ldots$ מהכסף

סיכום דיון

שתי אפשרויות להשקעה של X ש״ח:

א. השארת הכסף בחשבון: בכל שנה הפסד של אחוז אחד

ב. השקעה: בכל שנה בסיכוי חצי פי 2 ובסיכוי חצי נשארים עם 6 אחוזים מכסף

בתוחלת אפשרות ב עדיפה בהרבה

סה״כ אפשרות א עדיפה בהרבה

הערה (תרגיל): ניתן לשפר תמורה על ידי חלוקת כסף בין אפשרויות, למשל 99 אחוז מכסף באפשרות א ואחוז אחד באפשרות ב תיתן תמורה גדולה יותר מ99 אחוז בסיכוי די טוב

תוחלת של משתנה מקרי רציף

הגדרה: התוחלת של משתנה מקרי רציף X היא
$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y) \cdot y \, dy$$

מוגדרת רק כאשר אינטגרל מתכנס בהחלט

דוגמאות

א. אחיד: אם $X \sim U([a,b])$ אז

$$\mathbb{E}X = \int_a^b \frac{1}{b-a} y dy = \frac{b+a}{2}$$

דוגמאות

ב. מעריכי: אם $X \sim Exp(\lambda)$ אז

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} y dy = \frac{1}{\lambda}$$

(אינטגרציה בחלקים)

דוגמאות

ג. נורמלי: אם $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ אז

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} y dy = \ldots$$

נשתמש בסימטריה: $f_X(\mu + t) = f_X(\mu - t)$

ולכן אם תוחלת מוגדרת (ואכן) מתקיים

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \int_{-\infty}^{\mu} f_X(y) y dy + \int_{\mu}^{\infty} f_X(y) y dy \\
&= \int_0^{\infty} f_X(\mu - t)(\mu - t) dt + \int_0^{\infty} f_X(\mu + t)(\mu + t) dt \\
&= \int_0^{\infty} f_X(\mu - t)(\mu - t + \mu + t) dt = 2\mu \int_0^{\infty} f_X(\mu - t) dt = 2\mu \frac{1}{2} = \mu
\end{aligned}$$

סיכום ביניים

מרחב הסתברות

משתנים מיקריים: פונקציית הסתברות וצפיפות

פונקציית התפלגות ופירוק משתנים מיקריים (כלליים)

פונקציות של משתנים מיקריים

תוחלות: נוסחאות ודוגמאות

נוסחא כללית לתוחלת

משפט: אם X משתנה מקרי אז

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{0} -F_X(y)dy + \int_{0}^{\infty} (1 - F_X(y))dy$$

מסקנה: אם X מקבל רק ערכים אי שליליים אז

$$\mathbb{E}X = \int_{0}^{\infty} \mathbb{P}(X > y)dy$$

לא נוכיח במקרה כללי, אבל נסביר עבור X בדיד המקבל ערכים טבעיים (תרגיל: עבור משתנה מקרי רציף (אינטגרציה בחלקים))

נוסחא כללית לתוחלת

טענה: אם X משתנה מקרי המקבל ערכים ב $\{1,2,3,\ldots\}$ אז

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$$

הסבר (בציור):

נניח לשם פשטות ציור ש $\mathbb{P}(X=k) < \mathbb{P}(X=k+1)$

משמאל לכל $k \in \{1,2,3,\ldots\}$ נצייר מלבן ברוחב k ובגובה $\mathbb{P}(X=k)$

א. תוחלת X שווה לסכום שטחים של מלבנים

ב. עבור k קבוע, מה סך השטח שנתרם מהאיזור בין $k-1$ ל k ?

$$\sum_{\ell \geq k} \mathbb{P}(X=\ell) = \mathbb{P}(X \geq k)$$

נוסחא כללית לתוחלת

טענה: אם X משתנה מקרי המקבל ערכים ב $\{1,2,3,\ldots\}$ אז

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$$

הוכחה:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=k}^{\infty} \mathbb{P}(X = \ell) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{P}(X = \ell)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = \ell) \sum_{k=1}^{\ell} 1 = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = \ell)\ell = \mathbb{E}X$$

דוגמא

יהי $X \sim Exp(\lambda)$

ראינו כי לכל $y \geq 0$ מתקיים

$$F_X(y) = 1 - e^{-\lambda y}$$

לכן

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty (1 - F_X(y))dy = \int_0^\infty e^{-\lambda y} dy = \frac{1}{\lambda}$$

תוחלת של פונקציה

דוגמא: $X \sim U([0,1])$ ו $Y = X^2$. מהי $\mathbb{E}Y$?

לפי הגדרה יש לחשב

$$f_Y(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

ואז

$$\mathbb{E}Y = \int_0^1 f_Y(t)\,t\,dt$$

מתברר שיש דרך פשוטה יותר...

$$\mathbb{E}X^2 = \int_0^1 t^2 f_X(t)\,dt$$

תוחלת של פונקציה

משפט: יהי X משתנה מקרי בדיד ותהי h פונקציה כך ש $h(X)$ מוגדר היטב, אז

$$\mathbb{E}h(X) = \sum_a h(a)\mathbb{P}(X=a)$$

כאשר מוגדר (מתכנס בהחלט)

הוכחה:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}h(X) &= \sum_a \mathbb{P}(h(X)=a)a = \sum_a \sum_{b:h(b)=a} \mathbb{P}(X=b)a \\ &= \sum_a \sum_{b:h(b)=a} \mathbb{P}(X=b)h(b) = \sum_b \sum_{a:h(b)=a} \mathbb{P}(X=b)h(b) \\ &= \sum_b \mathbb{P}(X=b)h(b) \sum_{a:h(b)=a} 1 = \sum_b \mathbb{P}(X=b)h(b)\end{aligned}$$

דוגמא

יהי $X \sim Bin(n,p)$ ותהי $h(x) = x(x-1)$ אז

$$\begin{aligned}\mathbb{E}h(X) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^{k-2}(1-p)^{n-2-(k-2)} \\ &= n(n-1)p^2 (p+1-p)^{n-2} = n(n-1)p^2\end{aligned}$$

הערה: $\mathbb{E}h(X) \neq h(\mathbb{E}(X)) = np(np-1)$

תוחלת של פונקציה (רציף)

משפט: יהי X משתנה מקרי רציף ותהי h פונקציה כך ש $h(X)$ מוגדר היטב ורציף,
אז
$$\mathbb{E}h(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f_X(y) dy$$
כאשר מוגדר (מתכנס בהחלט)

סיכום ביניים

תוחלת:

בדידים ורציפים

נוסחא כללית

תוחלת של פונקציה

תוחלת של משתנה מקרי מעורב

תזכורת: ראינו כי ניתן לפרק משתנה מקרי X לחלק בדיד Y וחלק רציף Z כלומר

$$F_X = \alpha F_Y + (1-\alpha) F_Z$$

עבור $0 \leq \alpha \leq 1$

במקרה זה

$$\mathbb{E}X = \alpha \mathbb{E}Y + (1-\alpha)\mathbb{E}Z$$

דוגמא (ראינו)

מכונית מגיעה לרמזור שמתחלף מאדום לירוק ובחזרה בכל 30 שניות. נגדיר X כזמן (בשניות) שמכונית מחכה ברמזור.

יהי Y ששווה תמיד לאפס (בדיד) ו $Z \sim U([0,30])$ (רציף). אז

$$F_X = \frac{1}{2}F_Y + \frac{1}{2}F_Z$$

ולכן

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{2}\mathbb{E}Y + \frac{1}{2}\mathbb{E}Z = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}15 = 7.5$$

ליניאריות התוחלת

משפט: לכל שני משתנים מקריים X, Y ולכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mathbb{E}\left[\alpha X + \beta Y\right] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y]$$

ליניאריות התוחלת

משפט: לכל X, Y ולכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{E}\left[\alpha X + \beta Y\right] = \alpha\mathbb{E}[X] + \beta\mathbb{E}[Y]$

הוכחה (עבור Ω סופי):

ראשית

$$\mathbb{E}X = \sum_a \mathbb{P}[X = a] \cdot a = \sum_a \sum_{\omega\in\Omega : X(\omega = a)} \mathbb{P}[\omega]X(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}[\omega]X(\omega)$$

לכן

$$\mathbb{E}X + Y = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}[\omega](X(\omega) + Y(\omega)) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$$

דוגמאות

בינומי: סופר מספר הצלחות בניסויים בלתי תלויים

יהיו $X_1, \ldots, X_n$ משתנים בלתי תלויים המתפלגים $Ber(p)$

ונגדיר $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, p)$

לכל $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ מתקיים $\mathbb{E}X_i = (1 - p)0 + p1 = p$

ולכן

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i = np$$

דוגמאות

פרדוקס (יום הולדת): כמה אנשים בחדר על מנת שלפחות שניים יחלקו יום הולדת?

יהיו $Y_1, \ldots, Y_n$ בלתי תלויים ומתפלגים אחיד על $\{1, 2, \ldots, 365\}$

לכל זוג $1 \le i < j \le n$ נגדיר $X_{i,j} = \begin{cases} 1 & Y_i = Y_j \\ 0 & Y_i \neq Y_j \end{cases}$

נגדיר $X = \sum_{1 \le i < j \le n} X_{i,j}$

ולכן

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X = \mathbb{E} \sum_{1 \le i < j \le n} X_{i,j} &= \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{E}X_{i,j} \\ = \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{P}[X_{i,j} = 1] &= \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{365} = \frac{n(n-1)}{730} \end{aligned}$$

דוגמאות

פרדוקס (יום הולדת): כמה אנשים בחדר על מנת שלפחות שניים יחלקו יום הולדת?

יהיו $Y_1, \ldots, Y_n$ בלתי תלויים ומתפלגים אחיד על $\{1, 2, \ldots, 365\}$

לכל זוג $1 \leq i < j \leq n$ נגדיר $X_{i,j} = \begin{cases} 1 & Y_i = Y_j \\ 0 & Y_i \neq Y_j \end{cases}$

נגדיר $X = \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_{i,j}$ ונחשב $\mathbb{E}X = \frac{n(n-1)}{730}$

כלומר אם לפחות 28 אנשים בחדר תוחלת גדולה מאחד

הערה: כמו שראינו, תוחלת לא מבטיחה הסתברות גבוהה. נדבר עוד בהמשך

דוגמאות

מספר נקודות שבת בתמורה מיקרית:

תהי π תמורה (חח״ע ועל) המתפלגת אחיד בקבוצת התמורות על $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$

נגדיר משתנה מיקרי הסופר נקודות שבת $X(\pi) = \left|\{i \in [n] : \pi(i) = i\}\right|$

מהי $\mathbb{E}X$?

לכל $i \in [n]$ נגדיר $X_i(\pi) = \begin{cases} 1 & \pi(i) = i \\ 0 & \pi(i) \neq i \end{cases}$

לכן

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\sum_{i\in[n]} X_i = \sum_{i\in[n]} \mathbb{E}X_i = \sum_{i\in[n]} \frac{1}{n} = 1$$

דוגמאות

אוסף הקופונים:

זורקים כדורים ל n תאים באופן בלתי תלוי. יהי X מספר הזריקות עד שכל התאים מכילים לפחות כדור אחד. מהי $\mathbb{E}(X)$?

לכל $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ נגדיר את X_i להיות מספר הזריקות מהרגע ש i תאים מכילים לפחות כדור אחד עד הרגע ש $i+1$ תאים, ומתקיים

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{(n-i)/n} = \frac{n}{n-i}$$

ולכן

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \approx n \ln n$$

סיכום ביניים

תוחלת:

בדידים ורציפים

נוסחא כללית

תוחלת של פונקציה

תוחלת של משתנה מיקרי כללי

ליניאריות התוחלת: פירוק משתנה מיקרי לחלקים יכול להקל על הבנתו