מתמטיקה למדעי החיים

נגזרות מסדר גבוה וקירובים

אמיר יהודיוף

הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

נגזרת שניה

נגזרת ראשונה: מתארת קצב שינוי בערך הפונקציה

נגזרת שניה: מתארת קצב שינוי של קצב שינוי

סימון: $f^{(2)}(x)$ או $f''(x)$

דוגמא:

$f(t)$ היא מיקום חלקיק חד מימדי בזמן t

נגזרת = מהירות

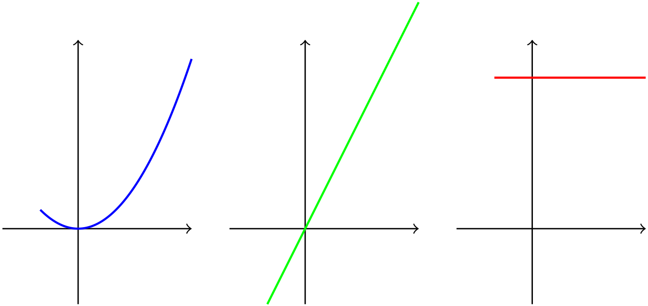
נגזרת של נגזרת = תאוצה

דוגמא

פונקציה: $f(x) = x^2$

נגזרת: $f'(x) = 2x$

נגזרת שניה: $f''(x) = 2$



שימושים

תזכורת: בנקודות מינימום או מקסימום הנגזרת היא אפס

הנגזרת השניה מאפשרת להבחין בין המקרים השונים

שימושים

תזכורת: בנקודות מינימום או מקסימום הנגזרת היא אפס

הנגזרת השניה מאפשרת להבחין בין המקרים השונים

משפט: אם $f'(x_0) = 0$ ו $f''(x_0) > 0$ אז x_0 היא נקודת מינימום מקומי של f

הסבר:

א. מכיוון ש $f''(x_0) > 0$ מתקיים ש $f'(x)$ עולה ממש בסביבת x_0

ב. לכן $f'(x)$ שלילית משמאל ל x_0 וחיובית מימין

ג. כלומר f יורדת משמאל ל x_0 ועולה מימין

דוגמא

שאלה: מבין כל המלבנים עם היקף 1 לאיזה יש השטח המקסימלי?

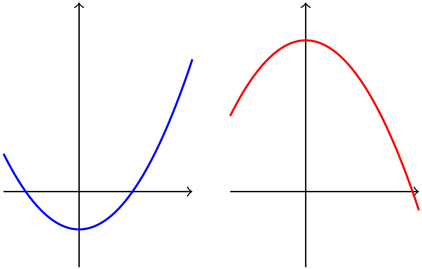
תשובה: ריבוע

הסבר:

א. נסמן ב x את אורך הצלע האופקית במלבן
ב. אורך הצלע האנכית = $\frac{1-2x}{2}$
ג. שטחו = $\frac{x(1-2x)}{2}$
ד. המקסימום בנקודה בה הנגזרת $\frac{1-4x}{2}$ מתאפסת, כלומר $x=\frac{1}{4}$
ה. יש לוודא שאכן מקסימום: הנגזרת השניה היא -2 והיא אכן שלילית

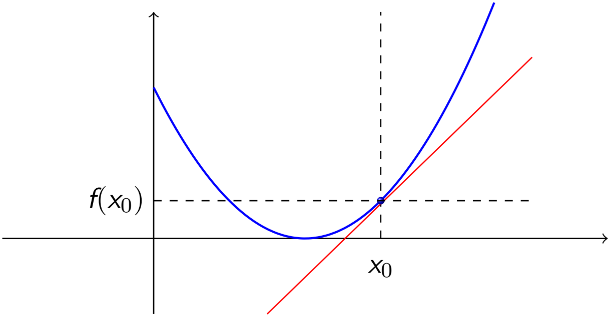
משמעות גרפית

אם הנגזרת השניה חיובית אז הפונקציה קמורה (כחול) ואם היא שלילית אז קעורה (אדום)



קירובים

ניתן לחשוב על משיק כקו הישר שמקרב את הפונקציה הכי טוב בנקודה



יתרון: אפשר לחשוב על הפונקציה כקו ישר

חסרון: זהו רק קירוב

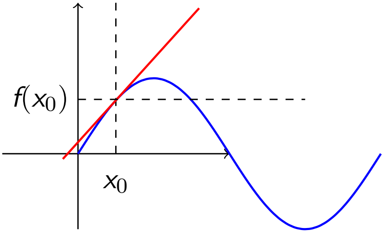
שאלה: כמה טוב הקירוב?

קירובים

הקירוב הלינארי (טיילור מסדר 1) של f ב x_0 הוא

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

(זוהי משוואת המשיק)

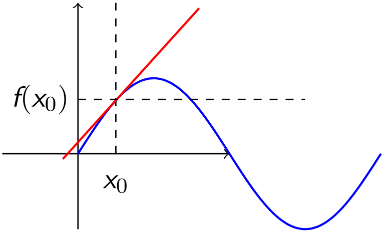


קירובים

הקירוב הלינארי (טיילור מסדר 1) של f ב x_0 הוא

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

(זוהי משוואת המשיק)



דוגמא: הקירוב הלינארי של $\sin(x)$ ב $\pi/3$ הוא

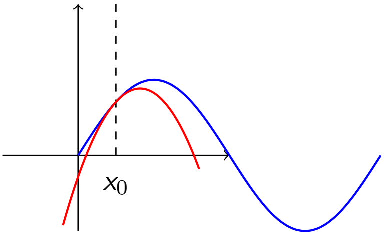
$$P_1(x) = \sin(\pi/3) + \cos(\pi/3)(x - \pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

קירובים

קירוב טיילור מסדר 2 של f ב x_0 הוא

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

זוהי פרבולה שמקרבת את הפונקציה היטב בסביבת x_0

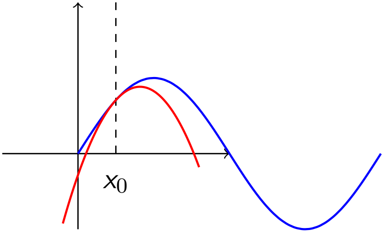


קירובים

קירוב טיילור מסדר 2 של f ב x_0 הוא

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

זוהי פרבולה שמקרבת את הפונקציה היטב בסביבת x_0



דוגמא: הקירוב מסדר 2 של $\sin(x)$ ב $\pi/3$ הוא

$$P_1(x) = \sin(\pi/3) + \cos(\pi/3)(x - \pi/3) - \frac{sin(\pi/3)}{2}(x - \pi/3)^2$$

נגזרות מסדר גבוה

נגזרת ראשונה: מתארת קצב שינוי בערך הפונקציה

נגזרת שניה: מתארת קצב שינוי של קצב שינוי

הנגזרת ה n ית של f מסומנת ב $f^{(n)}(x)$ ומתקבלת על ידי גזירת הפונקציה n פעמים (אם אפשר)

$$
\begin{aligned}
&f^{(0)}(x) = f(x)\\
&f^{(1)}(x) = f'(x)\\
&\dots\\
&f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'
\end{aligned}
$$

דוגמאות

1. $f(x) = e^x \;\Rightarrow\; f^{(1)}(x) = e^x,\; f^{(2)}(x) = e^x,\; f^{(3)}(x) = e^x$

דוגמאות

1. $f(x) = e^x \;\Rightarrow\; f^{(1)}(x) = e^x,\; f^{(2)}(x) = e^x,\; f^{(3)}(x) = e^x$

2. $f(x) = x^3 \;\Rightarrow\; f^{(1)}(x) = 3x^2,\; f^{(2)}(x) = 6x,\; f^{(3)}(x) = 6$

דוגמאות

1. $f(x) = e^x \;\Rightarrow\; f^{(1)}(x) = e^x,\; f^{(2)}(x) = e^x,\; f^{(3)}(x) = e^x$

2. $f(x) = x^3 \;\Rightarrow\; f^{(1)}(x) = 3x^2,\; f^{(2)}(x) = 6x,\; f^{(3)}(x) = 6$

3. $f(x) = \sin(x)$
   $\Rightarrow\; f^{(1)}(x) = \cos(x),\; f^{(2)}(x) = -\sin(x),\; f^{(3)}(x) = -\cos(x)$

דוגמאות

1. $f(x) = e^x \;\Rightarrow\; f^{(1)}(x) = e^x,\; f^{(2)}(x) = e^x,\; f^{(3)}(x) = e^x$

2. $f(x) = x^3 \;\Rightarrow\; f^{(1)}(x) = 3x^2,\; f^{(2)}(x) = 6x,\; f^{(3)}(x) = 6$

3. $f(x) = \sin(x)$
   $\Rightarrow\; f^{(1)}(x) = \cos(x),\; f^{(2)}(x) = -\sin(x),\; f^{(3)}(x) = -\cos(x)$

4. $f(x) = \ln(x) \;\Rightarrow\; f^{(1)}(x) = \frac{1}{x},\; f^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2},\; f^{(3)}(x) = 2\frac{1}{x^3}$

פולינום טיילור

פולינום טיילור מסדר n של f ב x_0 הוא

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= f(x_0) \\
&+ f'(x_0)(x - x_0) \\
&+ \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \\
&+ \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k
\end{aligned}$$

זהו פולינום מדרגה לכל היותר n שמקרב את הפונקציה היטב בסביבת x_0

תזכורת: $0! = 1, \quad 1! = 1, \quad n! = (n-1)! \cdot n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$

דוגמאות

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

דוגמא: פולינום טיילור מסדר 3 של $f(x) = x^2$ בנקודה $x_0 = 1$:

נחשב

$$f(x_0) = 1,\ f'(x_0) = 2x_0 = 2,\ f^{(2)}(x_0) = 2,\ f^{(3)}(x_0) = 0$$

דוגמאות

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

דוגמא: פולינום טיילור מסדר 3 של $f(x) = x^2$ בנקודה $x_0 = 1$:

נחשב

$$f(x_0) = 1,\ f'(x_0) = 2x_0 = 2,\ f^{(2)}(x_0) = 2,\ f^{(3)}(x_0) = 0$$

ולכן

$$P_3(x) = 1 + 2(x-1) + \frac{2}{2}(x-1)^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2$$

הוא מדרגה 2

דוגמאות

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

דוגמא: פולינום טיילור מסדר 3 של $f(x) = x^2$ בנקודה $x_0 = 1$:

נחשב

$$f(x_0) = 1, \; f'(x_0) = 2x_0 = 2, \; f^{(2)}(x_0) = 2, \; f^{(3)}(x_0) = 0$$

ולכן

$$P_3(x) = 1 + 2(x-1) + \frac{2}{2}(x-1)^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2$$

הוא מדרגה 2

נשים לב:

$$P_3(x) = 1 + 2x - 2 + x^2 - 2x + 1 = x^2 = f(x)$$

דוגמאות

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

דוגמא: פולינום טיילור מסדר 5 של $f(x) = \sin(x)$ בנקודה $x_0 = 0$:

נחשב

$$f^{(0)}(x_0) = \sin(x_0) = 0,\ f^{(1)}(x_0) = \cos(x_0) = 1,$$
$$f^{(2)}(x_0) = -\sin(x_0) = 0,\ f^{(3)}(x_0) = -\cos(x_0) = -1,$$
$$f^{(4)}(x_0) = \sin(x_0) = 0,\ f^{(5)}(x_0) = \cos(x_0) = 1$$

דוגמאות

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

דוגמא: פולינום טיילור מסדר 5 של $f(x) = \sin(x)$ בנקודה $x_0 = 0$:

נחשב

$$f^{(0)}(x_0) = \sin(x_0) = 0,\ f^{(1)}(x_0) = \cos(x_0) = 1,$$
$$f^{(2)}(x_0) = -\sin(x_0) = 0,\ f^{(3)}(x_0) = -\cos(x_0) = -1,$$
$$f^{(4)}(x_0) = \sin(x_0) = 0,\ f^{(5)}(x_0) = \cos(x_0) = 1$$

ולכן

$$P_5(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{0}{4!} \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

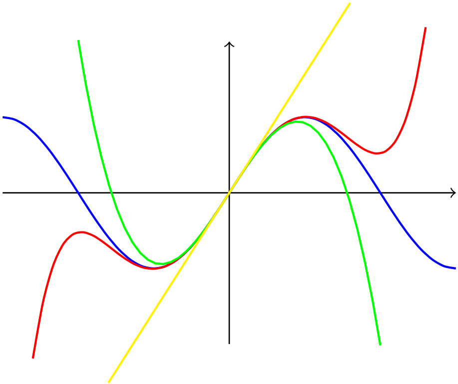
באופן גרפי

פולינום טיילור מסדר 5 של $\sin(x)$ = $f(x)$ בנקודה $x_0 = 0$:

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

באופן גרפי: הגרף הכחול של $\sin(x)$, $P_1(x)$, $P_3(x)$, $P_5(x)$

-- ניתן לראות שהקירוב מצוין בסביבת אפס וככל שמתרחקים איכותו יורדת



הערכות

פולינום טיילור מסדר 5 של $f(x)=\sin(x)$ בנקודה $x_0=0$:

$$P_5(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

במקום לחשב (בעזרת מחשבון)

$$\sin(0.2)\approx 0.19866933079$$

אפשר לחשב

$$P_5(0.2)=0.2-(0.2)^3/6+(0.2)^5/120=0.19866933333\ldots$$

(למעשה זה מה שמחשבון עושה עבור סדר גדול מספיק)

הערכות

פולינום טיילור מסדר 5 של $\sin(x)$ $f(x) =$ בנקודה $x_0 = 0$:

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

ראינו ש $\sin(0.2)$ ו $P_5(0.2)$ מסכימים בשמונה ספרות אחרי הנקודה

לעומת זאת

$$\sin(\pi/2) = 1$$

ו

$$P_5(\pi/2) \approx 1.00452485553$$

מסכימים רק בשתי ספרות

באופן כללי, ככל שמתרחקים מ x_0 הקירוב פחות טוב

קוסינוס

דוגמא: פולינום טיילור מסדר $4n$ של $f(x) = \cos(x)$ בנקודה 0:

נחשב

$$f^{(0)}(0) = \cos(0) = 1,\ f^{(1)}(0) = -\sin(0) = 0,$$
$$f^{(2)}(0) = -\cos(0) = -1,\ f^{(3)}(0) = \sin(0) = 0,$$
$$f^{(4)}(x_0) = \cos(0) = 1,\ f^{(5)}(x_0) = -\sin(0) = 0\dots$$

קוסינוס

דוגמא: פולינום טיילור מסדר $4n$ של $f(x) = \cos(x)$ בנקודה 0:

נחשב

$$f^{(0)}(0) = \cos(0) = 1, \ f^{(1)}(0) = -\sin(0) = 0,$$
$$f^{(2)}(0) = -\cos(0) = -1, \ f^{(3)}(0) = \sin(0) = 0,$$
$$f^{(4)}(x_0) = \cos(0) = 1, \ f^{(5)}(x_0) = -\sin(0) = 0 \ldots$$

ולכן

$$P_{4n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots + \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

אי

דוגמא: פולינום טיילור מסדר n של $f(x) = e^x$ בנקודה 0:

לכל n מתקיים

$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

ולכן

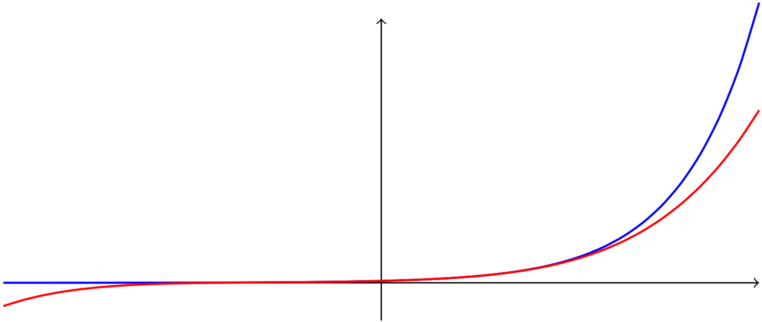
$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

באופן גרפי

פולינום טיילור מסדר 5 של $f(x) = e^x$ בנקודה 0:

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

באופן גרפי: הגרף הכחול של e^x והאדום של $P_5(x)$
-- ניתן לראות שהקירוב מצוין בסביבת אפס וככל שמתרחקים איכותו יורדת



דוגמא: פולינום טיילור מסדר 5 של $f(x) = \ln(x)$ בנקודה 1:

נחשב

$$f^{(0)}(1) = 0,\ f^{(1)}(1) = \frac{1}{1} = 1,$$
$$f^{(2)}(1) = -\frac{1}{1^2} = -1,\ f^{(3)}(1) = \frac{2}{1^3} = 2!,$$
$$f^{(4)}(1) = -\frac{2 \cdot 3}{1^4} = -3!,\ f^{(5)}(1) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1^5} = 4!$$

לן

דוגמא: פולינום טיילור מסדר 5 של $f(x)=\ln(x)$ בנקודה 1:

נחשב

$$\begin{aligned}
&f^{(0)}(1)=0,\ f^{(1)}(1)=\frac{1}{1}=1,\\
&f^{(2)}(1)=-\frac{1}{1^2}=-1,\ f^{(3)}(1)=\frac{2}{1^3}=2!,\\
&f^{(4)}(1)=-\frac{2\cdot 3}{1^4}=-3!,\ f^{(5)}(1)=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{1^5}=4!
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
P_5(x)&=0+(x-1)-\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{2!}{3!}(x-1)^3-\frac{3!}{4!}x^4+\frac{4!}{5!}(x-1)^5\\
&=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}
\end{aligned}$$

סיכום

בהנתן פונקציה גזירה n פעמים ונקודה x_0 הגדרנו פולינום $P_n(x)$ שמקרב את הפונקציה בסביבת x_0

פולינום זה הוא הכללה של המושג של משיק

כשנרצה להשתמש בשיטה זו, נבחר x_0 באופן שמאפשר לחשב את $P_n(x)$ בקלות ומצד שני כמה שיותר קרוב ל x ים שמעניינים אותנו

על מנת לחשב $P_n(x)$ יש לגזור את f n פעמים, להציב בנגזרות את הנקודה x_0, ולהציב בנוסחא הכללית

תכונות

משפט: אם $f(x)$ גזירה n פעמים ו $P_n(x)$ פולינום טיילור שלה מסדר n ב x_0 אז לכל $n \leq k \leq 0$ מתקיים

$$f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x)$$

במילים, כל n הנגזרות הראשונות זהות ב x_0

תכונות

משפט: אם $f(x)$ גזירה n פעמים ו $P_n(x)$ פולינום טיילור שלה מסדר n ב x_0 אז לכל $n \leq k \leq 0$ מתקיים

$$f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x)$$

במילים, כל n הנגזרות הראשונות זהות ב x_0

הסבר: $P_n(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots$

תכונות

משפט: אם $f(x)$ גזירה n פעמים ו $P_n(x)$ פולינום טיילור שלה מסדר n ב x_0 אז לכל n $0 \le k \le n$ מתקיים

$$f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x)$$

במילים, כל n הנגזרות הראשונות זהות ב x_0

הסבר: $P_n(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots$

$P_n(x_0) = f(x_0)$

תכונות

משפט: אם $f(x)$ גזירה n פעמים ו $P_n(x)$ פולינום טיילור שלה מסדר n ב x_0 אז לכל $0 \le k \le n$ מתקיים

$$f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x)$$

במילים, כל n הנגזרות הראשונות זהות ב x_0

הסבר: $P_n(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots$

$$P_n(x_0) = f(x_0)$$

$$P_n^{(1)}(x_0) = f^{(1)}(x_0) + f^{(2)}(x_0)(x - x_0) + \ldots \Big|_{x=x_0} = f^{(1)}(x_0)$$

תכונות

משפט: אם $f(x)$ גזירה n פעמים ו $P_n(x)$ פולינום טיילור שלה מסדר n ב x_0 אז לכל n $0 \leq k \leq n$ מתקיים

$$f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x)$$

במילים, כל n הנגזרות הראשונות זהות ב x_0

הסבר: $P_n(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots$

$$P_n(x_0) = f(x_0)$$

$$P_n^{(1)}(x_0) = f^{(1)}(x_0) + f^{(2)}(x_0)(x - x_0) + \ldots \Big|_{x=x_0} = f^{(1)}(x_0)$$

$$P_n^{(2)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) + \ldots \Big|_{x=x_0} = f^{(2)}(x_0)$$

תכונות

משפט: אם $f(x)$ גזירה n פעמים ו $P_n(x)$ פולינום טיילור שלה מסדר n ב x_0 אז לכל $0 \leq k \leq n$ מתקיים

$$f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x)$$

במילים, כל n הנגזרות הראשונות זהות ב x_0

הסבר: $P_n(x) = f(x_0) + f^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots$

$$P_n(x_0) = f(x_0)$$

$$P_n^{(1)}(x_0) = f^{(1)}(x_0) + f^{(2)}(x_0)(x - x_0) + \ldots \Big|_{x=x_0} = f^{(1)}(x_0)$$

$$P_n^{(2)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) + \ldots \Big|_{x=x_0} = f^{(2)}(x_0)$$

(זו הסיבה ל $k!$ בנוסחה -- הנגזרת ה k ית של $(x - x_0)^k$ היא $k!$)

שארית

אם x קרוב ל x_0 אז $P_n(x)$ קרוב ל $f(x)$, אבל מה הטעות?

הגדרה: השארית היא $f(x) - P_n(x)$

שארית

אם x קרוב ל x_0 אז $P_n(x)$ קרוב ל $f(x)$, אבל מה הטעות?

הגדרה: השארית היא $f(x) - P_n(x)$

משפט (שארית של לגרנג'): אם f גזירה $n+1$ פעמים ו $P_n(x)$ פולינום טיילור שלה מסדר n ב x_0 אז לכל x קיים c בין x_0 ל x כך ש

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

הערכות

תרגיל: העריכו $\sin(1)$ עד כדי $1/500$

הערכות

תרגיל: העריכו $\sin(1)$ עד כדי $1/500$

פתרון:

א. פולינום טיילור מסדר 5 של $f(x) = \sin(x)$ ב 0 הוא $P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

ב. נעריך באמצעותו $\sin(1)$ כ

$$P_5(1) = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = 0.841666\ldots$$

ג. נחסום טעות כך

$$|\sin(1) - P_5(1)| = \left|\frac{\sin^{(6)}(c)}{6!}(1-0)^6\right| \le \frac{1}{6!} = 0.001388\ldots < \frac{1}{500}$$

כי $|\sin^{(6)}(c)| = |\sin(c)| \le 1$

שארית

עתה אנו יכולים

א. לקרב את $f(x)$ באמצעות $P_n(x)$

ב. נבחר x_0 קרוב ל x אבל כך ש״קל לחשב ב x_0״

ג. בהנתן טעות שנרצה להשיג, נמצא את n

הסבר

משפט (שארית של לגרנג'): אם f גזירה $n+1$ פעמים ו $P_n(x)$ פולינום טיילור שלה מסדר n ב x_0 אז לכל x קיים c בין x_0 ל x כך ש

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

הסבר

משפט (שארית של לגרנג'): אם f גזירה $n+1$ פעמים ו $P_n(x)$ פולינום טיילור שלה מסדר n ב x_0 אז לכל x קיים c בין x_0 ל x כך ש

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

הסבר:

א. עבור $n=0$, זהו משפט לגרנג'

$$f(x) - f(x_0) = f^{(1)}(c)(x-x_0)$$

ב. עבור nים גדולים יותר נשתמש באינדוקציה

השארית קטנה

משפט: אם f גזירה $n+1$ פעמים ו $P_n(x)$ פולינום טיילור שלה מסדר n ב x_0 אז

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

משמעות: "השארית קטנה באופן מעריכי עם n"

השארית קטנה

משפט: אם f גזירה $n+1$ פעמים ו $P_n(x)$ פולינום טיילור שלה מסדר n ב x_0 אז

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

משמעות: "השארית קטנה באופן מעריכי עם n"

הסבר: ממשפט השארית לכל x, x_0 יש c כך ש

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - P_n(x_0)}{(x - x_0)^n} \right| \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0) \right|$$

משפט הסנדוויץ מסיים הוכחה (בהנחה שהנגזרת ה $n+1$ית חסומה)

השארית קטנה

משפט: אם f גזירה $n+1$ פעמים ו $P_n(x)$ פולינום טיילור שלה מסדר n ב x_0 אז

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

משמעות: "השארית קטנה באופן מעריכי עם n"

הסבר: ממשפט השארית לכל x, x_0 יש c כך ש

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - P_n(x_0)}{(x - x_0)^n} \right| \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0) \right|$$

משפט הסנדוויץ מסיים הוכחה (בהנחה שהנגזרת ה $n+1$ית חסומה)

הערה: זוהי תכונה שמאפיינת את פולינום טיילור

שימוש

משפט: אם f גזירה $n+1$ פעמים ו $P_n(x)$ פולינום טיילור שלה מסדר n ב x_0 אז

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

תרגיל:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}}{x^3} = 0$$

שימוש

משפט: אם f גזירה $n+1$ פעמים ו $P_n(x)$ פולינום טיילור שלה מסדר n ב x_0 אז

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

תרגיל:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^3} = 0$$

הסבר: מהמשפט כי פולינום טיילור של $\sin(x)$ באפס מסדר 3 הוא

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

נגזרות מסדר גבוה

ראינו: אם $f'(x_0) = 0$ ו $f^{(2)}(x_0) > 0$ אז x_0 מינימום מקומי

נגזרות מסדר גבוה

ראינו: אם $f'(x_0) = 0$ ו $f^{(2)}(x_0) > 0$ אז x_0 מינימום מקומי

הכללה: אם f גזירה $2n$ פעמים,

$$f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$$

ו $f^{(2n)}(x_0) > 0$ אז x_0 מינימום מקומי

נגזרות מסדר גבוה

ראינו: אם $f'(x_0) = 0$ ו $f^{(2)}(x_0) > 0$ אז x_0 מינימום מקומי

הכללה: אם f גזירה $2n$ פעמים,

$$f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$$

ו $f^{(2n)}(x_0) > 0$ אז x_0 מינימום מקומי

הסבר: באינדוקציה על n

א. אם $n = 1$, ידוע

ב. אם $n > 1$, אז x_0 מינימום מקומי של $f^{(2)}(x)$

לכן $f^{(1)}$ חיובית מימין ל x_0 ושלילית משמאל

ולכן f עולה מימין ל x_0 ויורדת משמאל

נגזרות מסדר גבוה

ראינו: אם f גזירה $2n$ פעמים,

$$f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$$

ו $f^{(2n)}(x_0) > 0$ אז x_0 מינימום מקומי

הערה: לא נכון לנגזרות אי זוגיות, למשל $f(x) = x^3$ מקיימת

$$f^{(1)}(0) = f^{(2)}(0) = 0, \ f^{(3)}(0) > 0$$

אבל 0 לא מינימום

סיכום

נגזרות מסדר גבוה

שימושים: קירובים ונקודות מינימום ומקסימום

פולינום טיילור: דוגמאות ותכונות