מתמטיקה למדעי החיים

נגזרות

אמיר יהודיוף

הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

נגזרת

אחד המושגים שהתניעו מהפכה מדעית

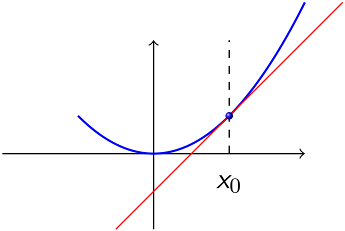
כמה נקודות מבט:

1. פיסיקלית - מקשרת למשל בין מיקום ומהירות
2. ביולוגיה - קצב גידול של אוכלוסיה
3. כלכלה - קצב גידול של חברה
4. גיאומטריה - שיפוע של משיק

...

משיקים

אינטואיציה: הנגזרת של פונקציה f בנקודה x_0 היא שיפוע המשיק בנקודה $(x_0, f(x_0))$



הגדרה

נאמר ש $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ גזירה בנקודה $x_0\in(a,b)$ אם הגבול הבא קיים

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

אם הוא קיים נסמנו ב $f'(x_0)$

הגדרה

נאמר ש $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ גזירה בנקודה $x_0\in(a,b)$ אם הגבול הבא קיים

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

אם הוא קיים נסמנו ב $f'(x_0)$

הערה:

נשים לב שהמכנה בגבול שואף לאפס

לכן כדי שגבול יהיה קיים על המונה לשאוף לאפס גם כן

בפרט כדי ש f תהיה גזירה עליה להיות רציפה

חוקי תנועה

נדמיין חלקיק שזז על הישר ובזמן t מיקומו $f(t)$

חוקי תנועה

נדמיין חלקיק שזז על הישר ובזמן t מיקומו $f(t)$

מהירות ממוצעת של חלקיק בין t ל $t+\Delta t$ היא $\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$

חוקי תנועה

נדמיין חלקיק שזז על הישר ובזמן t מיקומו $f(t)$

מהירות ממוצעת של חלקיק בין t ל $t+\Delta t$ היא $\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$

ככל ש Δt קטן, המהירות הממוצעת מתקרבת למהירות הריגעית ב t

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t)$$

חוקי תנועה

נדמיין חלקיק שזז על הישר ובזמן t מיקומו $f(t)$

מהירות ממוצעת של חלקיק בין t ל $t+\Delta t$ היא $\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$

ככל ש Δt קטן, המהירות הממוצעת מתקרבת למהירות הריגעית ב t

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t)$$

הערות:

א. במילים, המהירות היא נגזרת לפי הזמן של המיקום

ב. זו ההתחלה של חוקי התנועה של ניטון (והגדרת המסה למשל)

ישרים

נתבונן בישר $f(x) = 2x + 3$

מה שיפועו?

ישרים

נתבונן בישר $f(x) = 2x + 3$

מה שיפועו? 2

ישרים

נתבונן בישר $f(x) = 2x + 3$

מה שיפועו? 2

נחשב נגזרת בנקודה x לפי הגדרה

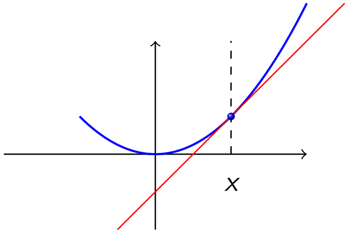
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h) + 3 - (2x+3)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

כלומר

$$f'(x) = 2$$

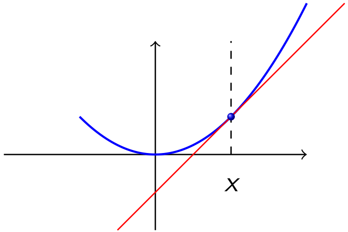
עוד דוגמא

הנגזרת של $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ב $x = 1$ היא שיפוע הקו האדום



עוד דוגמא

הנגזרת של $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ב $x = 1$ היא שיפוע הקו האדום



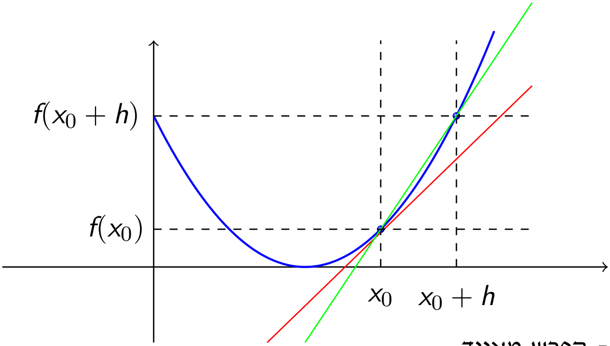
נחשבו, ע״י הגדרה:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}(x+h)^2 - \frac{1}{2}x^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2} \frac{2xh + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} x + \frac{h}{2} = x
\end{aligned}
$$

מסקנה: משוואת המשיק (הקו האדום) $x - \frac{1}{2}$

קשר בין הגדרות

1. $f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
2. שיפוע המשיק



h = הפרש מאוזן

$f(x_0+h)-f(x_0)$ = הפרש מאונך

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ = שיפוע הקו הירוק

ככל ש h קטן הקו הירוק מתקרב לאדום

פולינומים

1. $f(x) = c \;\Rightarrow\; f'(x) = 0$
2. $f(x) = x \;\Rightarrow\; f'(x) = 1$
3. $f(x) = x^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x$
4. $f(x) = x^3 \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2$
5. $f(x) = x^a \;\Rightarrow\; f'(x) = ax^{a-1}$

סינוס

טענה: $\sin'(x) = \cos(x)$

סינוס

טענה: $\sin'(x) = \cos(x)$

טענת עזר: $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)}{h} = 0$

הוכחה של טענת עזר:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(1-\cos(h))(1+\cos(h))}{h(1+\cos(h))} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1-(\cos(h))^2}{h(\cos(h)+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sin(h))^2}{h(\cos(h)+1)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \cdot \sin(h) \cdot \frac{1}{\cos(h)+1} = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0
\end{aligned}$$

סינוס

טענה: $\sin'(x) = \cos(x)$

טענת עזר: $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h)}{h} = 0$

הוכחה של טענה:

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1) + \cos(x)\sin(h)}{h} \\
&= \sin(x)\cdot 0 + \cos(x)\cdot 1 = \cos(x)
\end{aligned}$$

עוד דוגמאות

1. $\sin'(x) = \cos(x)$
2. $\cos'(x) = -\sin(x)$
3. $f(x) = e^x \;\Rightarrow\; f'(x) = f(x) = e^x$

עוד דוגמאות

1. $\sin'(x) = \cos(x)$
2. $\cos'(x) = -\sin(x)$
3. $f(x) = e^x \;\Rightarrow\; f'(x) = f(x) = e^x$

למה דווקא e? ראשית,

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

לכן, כדי ש $f' = f$ צריך

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

ואכן אם h קרוב לאפס אז e קרוב ל $(h+1)^{1/h}$

קשר לרציפות

משפט: כל פונקציה גזירה היא רציפה

שאלה: האם כל פונקציה רציפה היא גזירה?

קשר לרציפות

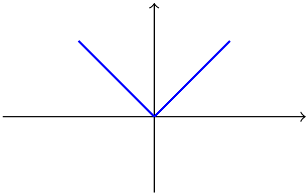
משפט: כל פונקציה גזירה היא רציפה

שאלה: האם כל פונקציה רציפה היא גזירה?

דוגמא: $f(x) = |x|$ רציפה אבל לא גזירה באפס

הסבר: הגבול $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ לא קיים

מה שיפוע משיק באפס?



אינטואיציה: גזירה = חלקה, בלי פינות

עוד דוגמא

תזכורת:

א. הגבול $\lim_{x\to 0}\sin(1/x)$ לא קיים

ב. $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$

עוד דוגמא

תזכורת:

א. הגבול $\lim_{x\to 0}\sin(1/x)$ לא קיים

ב. $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$

מסקנות:

א. הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

רציפה באפס אבל לא גזירה באפס, כי הגבול $\lim_{h\to 0} \frac{h\sin(1/h)-0}{h}$ לא קיים

עוד דוגמא

תזכורת:

א. הגבול $\lim_{x\to 0}\sin(1/x)$ לא קיים

ב. $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)=0$

מסקנות:

א. הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x\sin(1/x) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

רציפה באפס אבל לא גזירה באפס, כי הגבול $\lim_{h\to 0}\frac{h\sin(1/h)-0}{h}$ לא קיים

ב. הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

רציפה וגזירה באפס, כי $\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin(1/h)-0}{h}=0$

כללים

משפטים:

סכום: אם f, g גזירות ב (a, b) אז $f+g$ גזירה ב (a, b) ו

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

כפל: אם f, g גזירות ב (a, b) אז $f \cdot g$ גזירה ב (a, b) ו

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

כלל שרשרת: אם $f:(a,b)\to(c,d)$ גזירה בתחומה ו $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ גזירה בתחומה אז הרכבתן גזירה ב (a, b) ו

$$(g(f(x)))' = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

דוגמאות

סכום:

$$(\sin(x)+x^2)' = (\sin(x))' + (x^2)' = \cos(x) + 2x$$

דוגמאות

סכום:

$$(\sin(x) + x^2)' = (\sin(x))' + (x^2)' = \cos(x) + 2x$$

כפל:

$$(\cos(x) \cdot x)' = (\cos(x))' \cdot x + \cos(x) \cdot (x)' = -\sin(x) \cdot x + \cos(x)$$

דוגמאות

סכום:

$$(\sin(x)+x^2)' = (\sin(x))' + (x^2)' = \cos(x) + 2x$$

כפל:

$$(\cos(x)\cdot x)' = (\cos(x))'\cdot x + \cos(x)\cdot(x)' = -\sin(x)\cdot x + \cos(x)$$

כלל שרשרת: הרכבה של x^3 ו $\sin(x)+x^2$

$$\left((\sin(x)+x^2)^3\right)' = 3(\sin(x)+x^2)^2\cdot(\cos(x)+2x)$$

הסבר לכפל

טענה: אם f, g גזירות ב (a,b) אז $f \cdot g$ גזירה ב (a,b) ו

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

הסבר:

$$\begin{aligned}
&(f(x)\cdot g(x))' \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)
\end{aligned}$$

מנה

מנה: אם f,g גזירות ב (a,b) אז לכל $x\in(a,b)$ כך ש $g(x)\neq 0$

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= (f(x))'\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x)\cdot\frac{1}{g^2(x)}g'(x) \\ &= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\end{aligned}$$

השתמשנו: נגזרת של מכפלה ושל הרכבה

דוגמא

מנה:

$$
\begin{aligned}
(\tan(x))' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \\
&= \frac{(\sin(x))' \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (\cos(x))'}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)}
\end{aligned}
$$

הופכית

הופכי: אם f גזירה והפיכה בתחום כלשהו אז

$$x = f(f^{-1}(x))$$

ולכן

$$1 = (x)' = (f(f^{-1}(x)))' = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))'$$

הופכית

הופכי: אם f גזירה והפיכה בתחום כלשהו אז

$$x = f(f^{-1}(x))$$

ולכן

$$1 = (x)' = (f(f^{-1}(x)))' = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))'$$

כלומר

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

דוגמאות

תזכורת: $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

1. $(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$

דוגמאות

תזכורת: $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

1. $(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$
2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

דוגמאות

תזכורת: $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

1. $(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$
2. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3.

$$\begin{aligned}(\sin^{-1}(x))' &= \frac{1}{(\sin'(\sin^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\sin^{-1}(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

מעריכיות

1. $(2^x)' = \left((e^{\ln(2)})^x\right)' = \left(e^{\ln(2)x}\right)' = e^{\ln(2)x} \cdot (\ln(2)x)' = 2^x \cdot \ln(2)$

מעריכיות

1. $(2^x)' = \left((e^{\ln(2)})^x\right)' = \left(e^{\ln(2)x}\right)' = e^{\ln(2)x} \cdot (\ln(2)x)' = 2^x \cdot \ln(2)$

2. $(x^x)' = \left(e^{x\ln(x)}\right)' = e^{x\ln(x)}\left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\ln(x) + 1)$

סיכום

הגדרנו ניגזרת

משמעות גיאומטרית ופיסיקלית

כללים (סכום, מכפלה והרכבה)

דוגמאות ומסקנות

נראה שימושים בהמשך

מושג בסיסי: גבול

מושג מורכב יותר: רציפות

מושג מורכב יותר: נגזרת

תכונות נגזרת נובעות מתכונות גבול

קיצון

שימוש: מציאת נקודות קיצון של פונקציות (בנקודת קיצון הנגזרת היא אפס)

קיצון

שימוש: מציאת נקודות קיצון של פונקציות (בנקודת קיצון הנגזרת היא אפס)

משפט (פרמה): אם $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ גזירה בתחומה ו $x_0\in(a,b)$ נקודת מקסימום, כלומר $f(x)\le f(x_0)$ לכל $x\in(a,b)$, אז $f'(x_0)=0$

הסבר: בציור ובקצרה

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\le 0,\ \lim_{h\to 0-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\ge 0$$

ומכיוון שגבול קיים, חייב להיות אפס

קיצון

שימוש: מציאת נקודות קיצון של פונקציות (בנקודת קיצון הנגזרת היא אפס)

משפט (פרמה): אם $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ גזירה בתחומה ו $x_0\in(a,b)$ נקודת מקסימום, כלומר $f(x)\le f(x_0)$ לכל $x\in(a,b)$, אז $f'(x_0)=0$

הסבר: בציור ובקצרה

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\le 0,\ \lim_{h\to0-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\ge 0$$

ומכיוון שגבול קיים, חייב להיות אפס

הערה: נכון גם לגבי נקודת מינימום

דוגמא

שאלה: מבין כל המלבנים עם היקף 1 לאיזה יש השטח המקסימלי?

דוגמא

שאלה: מבין כל המלבנים עם היקף 1 לאיזה יש השטח המקסימלי?

תשובה: ריבוע

הסבר:

דוגמא

שאלה: מבין כל המלבנים עם היקף 1 לאיזה יש השטח המקסימלי?

תשובה: ריבוע

הסבר:

א. נסמן ב x את אורך הצלע האופקית במלבן

ב. אורך הצלע האנכית = $\frac{1-2x}{2}$

ג. שטחו = $\frac{x(1-2x)}{2}$

ד. המקסימום בנקודה בה הנגזרת $\frac{1-4x}{2}$ מתאפסת, כלומר $x = \frac{1}{4}$

ה. יש לוודא שאכן מקסימום (בהמשך)

הערה

ראינו: הנגזרת בנקודת מינימום או מקסימום היא אפס

הערה

ראינו: הנגזרת בנקודת מינימום או מקסימום היא אפס

הערה: אם הנגזרת שווה אפס לא בהכרח יש מינימום או מקסימום

דוגמא: הנגזרת של x^3 היא $3x^2$ והיא מתאפסת באפס, אבל אפס היא לא מינימום ולא מקסימום

ממוצעים

אבחנה: אם חלקיק חד מימדי מתחיל ומסיים באותה נקודה אז בזמן כלשהו מהירותו אפס

ממוצעים

אבחנה: אם חלקיק חד מימדי מתחיל ומסיים באותה נקודה אז בזמן כלשהו מהירותו אפס

משפט (רול): אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה ו $f(a)=f(b)$ אז יש $x_0\in(a,b)$ כך ש $f'(x_0)=0$

ממוצעים

אבחנה: אם חלקיק חד מימדי מתחיל ומסיים באותה נקודה אז בזמן כלשהו מהירותו אפס

משפט (רול): אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה ו $f(a)=f(b)$ אז יש $x_0\in(a,b)$ כך ש $f'(x_0)=0$

הוכחה:

א. אם הפונקציה קבועה, אז $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$

ב. אחרת, מכיוון ש f גזירה היא גם רציפה

ג. לכן יש ל f נקודת קיצון x_0 (מקסימום או מינימום) בקטע הפתוח (a,b)

ד. ממשפט פרמה הנגזרת ב x_0 היא אפס

הכללה

אבחנה: אם אדם נוסע מניו יורק לבוסטון (345 ק״מ) בשלוש שעות אז בזמן כלשהו מהירותו 115 קמ״ש

הכללה

אבחנה: אם אדם נוסע מניו יורק לבוסטון (345 ק״מ) בשלוש שעות אז בזמן כלשהו מהירותו 115 קמ״ש

משפט (לגרנג'): אם $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ גזירה אז יש $x_0 \in (a,b)$ כך ש

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

הכללה

אבחנה: אם אדם נוסע מניו יורק לבוסטון (345 ק״מ) בשלוש שעות אז בזמן כלשהו מהירותו 115 קמ״ש

משפט (לגרנג'): אם $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ גזירה אז יש $x_0 \in (a, b)$ כך ש

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

הוכחה:

א. נגדיר

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

הכללה

אבחנה: אם אדם נוסע מניו יורק לבוסטון (345 ק״מ) בשלוש שעות אז בזמן כלשהו מהירותו 115 קמ״ש

משפט (לגרנג'): אם $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ גזירה אז יש $x_0 \in (a, b)$ כך ש

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

הוכחה:

א. נגדיר

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ב. נשים לב

$$g(a) = g(b) = f(a)$$

הכללה

אבחנה: אם אדם נוסע מניו יורק לבוסטון (345 ק״מ) בשלוש שעות אז בזמן כלשהו מהירותו 115 קמ״ש

משפט (לגרנג'): אם $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ גזירה אז יש $x_0 \in (a,b)$ כך ש

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

הוכחה:

א. נגדיר

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ב. נשים לב

$$g(a) = g(b) = f(a)$$

ג. ממשפט רול קיים x_0 כך ש $g'(x_0) = 0$ כלומר

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

שימוש

הנגזרת מאפשרת להבין תחומי עליה וירידה של פונקציה

שימוש

הנגזרת מאפשרת להבין תחומי עליה וירידה של פונקציה

משפט: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה. הפונקציה f עולה אם ורק אם $f'(x)\geq 0$ לכל $x\in(a,b)$

שימוש

הנגזרת מאפשרת להבין תחומי עליה וירידה של פונקציה

משפט: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה. הפונקציה f עולה אם ורק אם $f'(x)\geq 0$ לכל $x\in(a,b)$

הוכחה:

א. אם f עולה אז לכל x ולכל $h\neq 0$ מתקיים

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0$$

ובפרט הנגזרת אי שלילית

שימוש

הנגזרת מאפשרת להבין תחומי עליה וירידה של פונקציה

משפט: תהי $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ גזירה. הפונקציה f עולה אם ורק אם $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in (a, b)$

הוכחה:

א. אם f עולה אז לכל x ולכל $h \neq 0$ מתקיים

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

ובפרט הנגזרת אי שלילית

ב. אם הנגזרת אי שלילית אז ממשפט לגרנג' לכל $x_1 < x_2$ קיים x_0 כך ש

$$0 \leq f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

כלומר $f(x_2) \geq f(x_1)$

שימוש

הנגזרת מאפשרת להבין תחומי עליה וירידה של פונקציה

דוגמא: מהם תחומי עליה וירידה של $f(x) = (x+1)^2 - x$

שימוש

הנגזרת מאפשרת להבין תחומי עליה וירידה של פונקציה

דוגמא: מהם תחומי עליה וירידה של $f(x) = (x+1)^2 - x$

פתרון: נחשב

$$f'(x) = 2(x+1) - 1 = 2x + 1$$

א. הפונקציה עולה בתחום $x \geq -\frac{1}{2}$ כי הנגזרת אי שלילית בתחום זה

ב. הפונקציה יורדת בתחום $x \leq -\frac{1}{2}$ כי הנגזרת לא חיובית בתחום זה

מסקנה

משפט: אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה ולכל $x\in(a,b)$ מתקיים $f'(x)=0$ אז f קבועה על $[a,b]$

מסקנה

משפט: אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה ולכל $x\in(a,b)$ מתקיים $f'(x)=0$ אז f קבועה על $[a,b]$

הוכחה: ממשפט לגרנג' לכל $x_1<x_2$ בתחום קיים x_0 כך ש

$$0=f'(x_0)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

כלומר $f(x_2)=f(x_1)$

שימוש

הוכחת אי שיוויונים

טענה: לכל x ממשי מתקיים $1 + x \leq e^x$

שימוש

הוכחת אי שיוויונים

טענה: לכל x ממשי מתקיים $1+x \leq e^x$

הוכחה: נגדיר

$$f(x) = e^x - x - 1$$

ונחשב

$$f'(x) = e^x - 1$$

לכן f יורדת בתחום $x \leq 0$ ועולה בתחום $x \geq 0$ ולכן ערכה באפס הוא המינימלי:

$$f(x) \geq f(0) = 0$$

נצייר

עוד הכללה

משפט (לגרנג'): אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה אז יש $x_0\in(a,b)$ כך ש

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

משפט (קושי): אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ו $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירות אז יש $x_0\in(a,b)$ כך ש

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x_0)$$

עוד הכללה

משפט (לגרנג'): אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה אז יש $x_0\in(a,b)$ כך ש

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

משפט (קושי): אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ו $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירות אז יש $x_0\in(a,b)$ כך ש

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x_0)$$

הוכחה (דומה ללגרנג'):

א. נגדיר

$$h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

עוד הכללה

משפט (לגרנג'): אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה אז יש $x_0\in(a,b)$ כך ש

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

משפט (קושי): אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ו $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירות אז יש $x_0\in(a,b)$ כך ש

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x_0)$$

הוכחה (דומה ללגרנג'):

א. נגדיר

$$h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

ב. נשים לב $h(a)=h(b)=f(a)$

עוד הכללה

משפט (לגרנג'): אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה אז יש $x_0\in(a,b)$ כך ש

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

משפט (קושי): אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ו $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירות אז יש $x_0\in(a,b)$ כך ש

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x_0)$$

הוכחה (דומה ללגרנג'):

א. נגדיר

$$h(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

ב. נשים לב $h(a)=h(b)=f(a)$

ג. ממשפט רול קיים x_0 כך ש $h'(x_0)=0$ כלומר

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x_0)$$

כלי לחישוב גבולות: כלל לופיטל

דוגמא: $\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x) =$

כלי לחישוב גבולות: כלל לופיטל

דוגמא: $\lim_{x\to 0^+} x\cdot \ln(x) = 0\cdot(-\infty) =?$

כלי לחישוב גבולות: כלל לופיטל

דוגמא: $\lim_{x\to 0^+} x\cdot \ln(x) = 0\cdot(-\infty) =?$

גיום פרנסואה אנטואן מרקיז לופיטל כתב ספר ובו תיאר משפט:

אם

א. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\lim_{x\to x_0} g(x)$ הם 0 או $\pm\infty$

ב. f, g גזירות בסביבת x_0

ג. $g(x)\neq 0$ עבור $x\neq x_0$ בסביבת x_0

אז

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

הערה: מתקיים גם לגבולות חד צדדיים וגם לגבולות באינסוף

דוגמא

אם

א. $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\lim_{x\to x_0} f(x)$ הם 0 או $\pm\infty$

ב. f, g גזירות בסביבת x_0

ג. $g(x) \neq 0$ עבור $x \neq x_0$ בסביבת x_0

אז

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

מסקנה:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} -x = 0\end{aligned}$$

הסבר

משפט (אפס חלקי אפס): אם

א. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

ב. f, g גזירות בסביבת x_0

ג. $g(x) \neq 0$ עבור $x \neq x_0$ בסביבת x_0

אז

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

הסבר: נניח תחילה לשם פשטות ש $g'(x_0) \neq 0$

הסבר

משפט (אפס חלקי אפס): אם

א. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

ב. f, g גזירות בסביבת x_0

ג. $g(x) \neq 0$ עבור $x \neq x_0$ בסביבת x_0

אז

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

הסבר: נניח תחילה לשם פשטות ש $g'(x_0) \neq 0$

מכיוון ש f, g רציפות $f(x_0) = g(x_0) = 0$

לכן

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

הסבר

משפט (אפס חלקי אפס): אם

א. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

ב. f, g גזירות בסביבת x_0

ג. $g(x) \neq 0$ עבור $x \neq x_0$ בסביבת x_0

אז

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

הסבר: ממשפט קושי לכל x יש c בין x_0 ל x כך ש

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

וכש x שואף ל x_0 גם c שואף ל x_0

הסבר

משפט (אפס חלקי אפס): אם

א. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

ב. f, g גזירות בסביבת x_0

ג. $g(x) \neq 0$ עבור $x \neq x_0$ בסביבת x_0

אז

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

הסבר: ממשפט קושי לכל x יש c בין x_0 ל x כך ש

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

וכש x שואף ל x_0 גם c שואף ל x_0

(כשהגבול הוא אינסוף, החישוב מסובך יותר)

דוגמאות

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} =$
2.
3.
4.
5.
6.

דוגמאות

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$
2.
3.
4.
5.
6.

דוגמאות

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1$
2. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} =$
3.
4.
5.
6.

דוגמאות

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

3.

4.

5.

6.

דוגמאות

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1$
2. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0$
3. $\lim_{x\to 1}\frac{5x^4-4x^2-1}{10-x-9x^3} =$
4.
5.
6.

דוגמאות

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{5x^4-4x^2-1}{10-x-9x^3} = \lim_{x\to 1} \frac{20x^3-8x}{-1-27x^2} = \frac{12}{-28} = -\frac{3}{7}$
4.
5.
6.

דוגמאות

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$

2. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0$

3. $\lim_{x \to 1} \frac{5x^4 - 4x^2 - 1}{10 - x - 9x^3} = \lim_{x \to 1} \frac{20x^3 - 8x}{-1 - 27x^2} = \frac{12}{-28} = -\frac{3}{7}$

4. $\lim_{x \to -\infty} xe^x =$

5.

6.

דוגמאות

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1$
2. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0$
3. $\lim_{x\to 1}\frac{5x^4-4x^2-1}{10-x-9x^3} = \lim_{x\to 1}\frac{20x^3-8x}{-1-27x^2} = \frac{12}{-28} = -\frac{3}{7}$
4. $\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0$
5.
6.

דוגמאות

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0$

3. $\lim_{x\to 1}\frac{5x^4-4x^2-1}{10-x-9x^3} = \lim_{x\to 1}\frac{20x^3-8x}{-1-27x^2} = \frac{12}{-28} = -\frac{3}{7}$

4. $\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0$

5. $\lim_{x\to 1}\frac{a^{1-x}-1}{1-x} =$

6.

דוגמאות

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1$

2. $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to \infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to \infty}\frac{2}{e^x} = 0$

3. $\lim_{x\to 1}\frac{5x^4-4x^2-1}{10-x-9x^3} = \lim_{x\to 1}\frac{20x^3-8x}{-1-27x^2} = \frac{12}{-28} = -\frac{3}{7}$

4. $\lim_{x\to -\infty} xe^x = \lim_{x\to -\infty}\frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0$

5. $\lim_{x\to 1}\frac{a^{1-x}-1}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{-a^{1-x}\ln(a)}{-1} = \ln(a)$

6.

דוגמאות

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1$
2. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0$
3. $\lim_{x\to 1}\frac{5x^4-4x^2-1}{10-x-9x^3} = \lim_{x\to 1}\frac{20x^3-8x}{-1-27x^2} = \frac{12}{-28} = -\frac{3}{7}$
4. $\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0$
5. $\lim_{x\to 1}\frac{a^{1-x}-1}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{-a^{1-x}\ln(a)}{-1} = \ln(a)$
6. $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x} =$

דוגמאות

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

3. $\lim_{x\to 1} \frac{5x^4-4x^2-1}{10-x-9x^3} = \lim_{x\to 1} \frac{20x^3-8x}{-1-27x^2} = \frac{12}{-28} = -\frac{3}{7}$

4. $\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$

5. $\lim_{x\to 1} \frac{a^{1-x}-1}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{-a^{1-x}\ln(a)}{-1} = \ln(a)$

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

דוגמאות

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$

2. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to \infty} \frac{2}{e^x} = 0$

3. $\lim_{x\to 1} \frac{5x^4-4x^2-1}{10-x-9x^3} = \lim_{x\to 1} \frac{20x^3-8x}{-1-27x^2} = \frac{12}{-28} = -\frac{3}{7}$

4. $\lim_{x\to -\infty} xe^x = \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$

5. $\lim_{x\to 1} \frac{a^{1-x}-1}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{-a^{1-x}\ln(a)}{-1} = \ln(a)$

6. $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

   $\lim_{x\to \infty} x^{1/x} = \lim_{x\to \infty} e^{\ln(x)/x} = e^0 = 1$

סדרי גודל

בעזרת החלפת משתנים וכלל לופיטל ניתן להראות למשל

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log_2(x))^4}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2^x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4^x}{2^{2^x}} = 0 \ldots$$

אפשר לסדר פונקציות לפי סדר הגודל, קצב הגידול שלהן

למשל, לוגריתמים מסדר גודל קטן מפולנומים ופולינומים מסדר גודל קטן ממעריכיות

הערה: יכול להיות מבלבל $x^{\sqrt{\ln(x)}}$?? $2^{\ln^2(x)}$

סיכום

הגדרנו נגזרת

משמעות גיאומטרית ופיסיקלית

כללים (סכום, מכפלה והרכבה)

דוגמאות ומסקנות

שימושים: קיצון, אי שיוויונים, לופיטל