מתמטיקה למדעי החיים

רציפות

אמיר יהודיוף

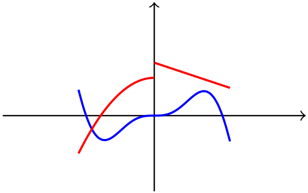
הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

רציפות

אינטואיציה: פונקציה f היא רציפה אם

1. אפשר לצייר גרף שלה בלי להרים עט מדף

דוגמא: רציפה לא רציפה



2. אם משנים x מעט אז f משתנה מעט

רציפות

הגדרה: הפונקציה f רציפה בנקודה x_0 אם הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים ובנוסף

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

הפונקציה f רציפה בתחום כלשהו אם היא רציפה בכל נקודה בתחום

דוגמאות

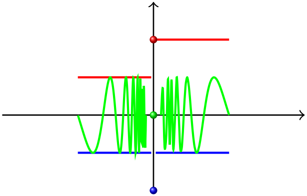
דוגמאות לפונקציות רציפות בכל נקודה: ליניאריות, פולינומים, סינוס, קוסינוס

דוגמאות לפונקציות לא רציפות באפס:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \neq 0 \\ -2 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



פולינומים

טענה: הפונקציה $f(x) = x^2$ רציפה באפס

פולינומים

טענה: הפונקציה $f(x) = x^2$ רציפה באפס

הסבר: $\lim_{x\to 0} x^2 = 0 = f(0)$

פולינומים

טענה: הפונקציה $f(x) = x^2$ רציפה באפס

הסבר: $\lim_{x\to 0} x^2 = 0 = f(0)$

טענה: הפונקציה $f(x) = x^2$ רציפה בכל נקודה

פולינומים

טענה: הפונקציה $f(x) = x^2$ רציפה באפס

הסבר: $\lim_{x \to 0} x^2 = 0 = f(0)$

טענה: הפונקציה $f(x) = x^2$ רציפה בכל נקודה

הסבר: לכל x_0 ממשי מתקיים

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} x^2 &= \lim_{h \to 0} (x_0 + h)^2 \\
&= \lim_{h \to 0} x_0^2 + 2x_0 h + h^2 \\
&= x_0^2 + 0 + 0 = x_0^2
\end{aligned}$$

סינוס באפס

טענה: הפונקציה $\sin(x)$ היא רציפה באפס

סינוס באפס

טענה: הפונקציה $\sin(x)$ היא רציפה באפס

הוכחה: יודעים שלכל x ממשי מתקיים $|\sin(x)| \leq |x|$ כלומר

$$-|x| \leq \sin(x) \leq |x|$$

ומכיוון ש $\lim_{x\to 0} -|x| = \lim_{x\to 0} |x| = 0$ ממשפט הסנדוויץ' נובע ש

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0 = \sin(0)$$

$\square$

סינוס באפס

טענה: הפונקציה $\sin(x)$ היא רציפה באפס

הוכחה: יודעים שלכל x ממשי מתקיים $|\sin(x)| \leq |x|$ כלומר

$$-|x| \leq \sin(x) \leq |x|$$

ומכיוון ש $\lim_{x\to 0} -|x| = \lim_{x\to 0} |x| = 0$ ממשפט הסנדוויץ' נובע ש

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0 = \sin(0)$$

□

באופן דומה: קוסינוס רציפה באפס, כלומר $\lim_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$

סינוס

טענה: הפונקציה $\sin(x)$ היא רציפה בכל נקודה

סינוס

טענה: הפונקציה $\sin(x)$ היא רציפה בכל נקודה

הוכחה:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\sin(x) &= \lim_{h\to 0}\sin(x_0+h)\\ &= \lim_{h\to 0}\sin(x_0)\cos(h)+\cos(x_0)\sin(h)\\ &= \sin(x_0)\cdot 1+\cos(x_0)\cdot 0=\sin(x_0)\end{aligned}$$

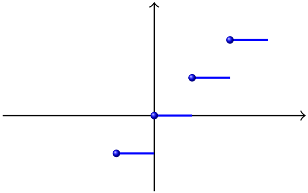
קפיצות

תנו דוגמא לפונקציה שיש לה אינסוף נקודות אי רציפות (״קפיצות״)

קפיצות

תנו דוגמא לפונקציה שיש לה אינסוף נקודות אי רציפות ("קפיצות")

למשל, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ הערך השלם התחתון של x



חשבון

משפט: אם $f(x), g(x)$ רציפות בנקודה x_0 אז גם

$$f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x) \cdot g(x)$$

רציפות ב x_0

ואם בנוסף $g(x_0) \neq 0$ אז גם

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

רציפה ב x_0

חשבון

משפט: אם $f(x), g(x)$ רציפות בנקודה x_0 אז גם

$$f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x) \cdot g(x)$$

רציפות ב x_0

ואם בנוסף $g(x_0) \neq 0$ אז גם

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

רציפה ב x_0

דוגמא: $\tan(x)$ רציפה בקטע $(-\pi/2, \pi/2)$

הבדל

1. הפונקציה $\sin(x)$ רציפה בכל נקודה

הבדל

1. הפונקציה $\sin(x)$ רציפה בכל נקודה

2. הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

רציפה בכל נקודה פרט לאפס

הבדל

1. הפונקציה $\sin(x)$ רציפה בכל נקודה

2. הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

רציפה בכל נקודה פרט לאפס

3. אבחנה: הפונקציה $xf(x)$ רציפה בכל נקודה (כולל אפס)

הסבר:

א. בכל נקודה שאינה אפס נובע מחשבון והרכבה

ב. באפס - מכיוון שלכל $x \neq 0$ מתקיים

$$-|x| \leq x\sin(1/x) \leq |x|$$

ומכיוון ש $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ ממשפט הסנדוויץ' נובע ש

$$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0 = 0 \cdot f(0)$$

הרכבה

בהנתן

$$f : A \to B,\ g : B \to C$$

ניתן להגדיר פונקציה חדשה $h : A \to C$ הנקראת "g מורכבת על f" על ידי

$$h(a) = g(f(a))$$

הרכבה

בהנתן

$$f: A \to B,\ \ g: B \to C$$

ניתן להגדיר פונקציה חדשה $h: A \to C$ הנקראת "g מורכבת על f" על ידי

$$h(a) = g(f(a))$$

דוגמאות:

א. ההרכבה של $g(x) = x^2$ על $f(x) = x + 1$ היא

$$g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$$

ב. ההרכבה של $g(x) = \sin(x)$ על $f(x) = \sqrt{x}$ היא

$$g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sin(\sqrt{x})$$

הערה: יש לבדוק תחומי הגדרה, למשל $\ln(-|x|)$ לא מוגדרת

הרכבה: רציפות

משפט: נניח ש

$$f : A \to B,\ g : B \to C$$

פונקציות כך ש

1. f רציפה ב a
2. g רציפה ב $f(a)$

אז ההרכבה של g על f רציפה ב a גם כן

הרכבה: רציפות

משפט: נניח ש

$$f : A \to B,\ g : B \to C$$

פונקציות כך ש

1. f רציפה ב a
2. g רציפה ב $f(a)$

אז ההרכבה של g על f רציפה ב a גם כן

דוגמאות:

א. $\sin(x^2)$ רציפה בכל נקודה

ב. $\sqrt{\sin(x)}$ רציפה למשל בקטע $(0,\pi)$

הרכבה: רציפות

משפט: נניח ש

$$f : A \to B,\ g : B \to C$$

פונקציות כך ש

1. f רציפה ב a
2. g רציפה ב $f(a)$

אז ההרכבה של g על f רציפה ב a גם כן

דוגמאות:

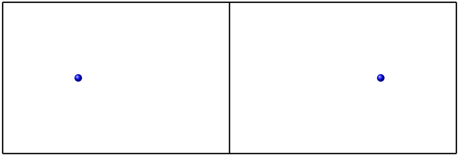
א. $\sin(x^2)$ רציפה בכל נקודה

ב. $\sqrt{\sin(x)}$ רציפה למשל בקטע $(0, \pi)$

הסבר: כש x קרוב ל a אז $f(x)$ קרוב ל $f(a)$ ולכן $g(f(x))$ קרוב ל $g(f(a))$

ערך הביניים

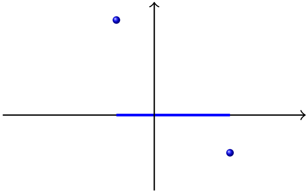
האם אפשר לחבר שתי נקודות בלי להרים עט ובלי לחצות קו?



מתמטיקה מספקת כלים להבנת מגבלותינו

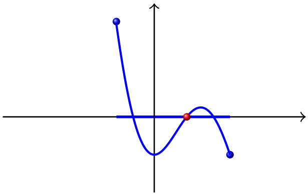
ערך הביניים

משפט: תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$. אם $f(a) \geq 0$ ו $f(b) \leq 0$ אז יש $x \in [a, b]$ כך ש $f(x) = 0$



ערך הביניים

משפט: תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$. אם $f(a) \geq 0$ ו $f(b) \leq 0$ אז יש $x \in [a, b]$ כך ש $f(x) = 0$



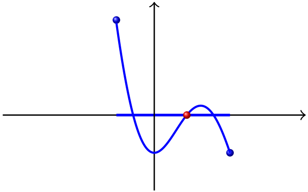
הערות:

א. הנקודה x תלויה ב f

ב. יכולים להיות כמה xים, יש לפחות אחד

ערך הביניים

משפט: תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$. אם $f(a) \geq 0$ ו $f(b) \leq 0$ אז יש $x \in [a, b]$ כך ש $f(x) = 0$



הערות:

א. הנקודה x תלויה ב f

ב. יכולים להיות כמה xים, יש לפחות אחד

הסבר בציור

חלוקה הוגנת

מחלקים עוגה לשני אנשים A, B

ישנה פונקציה $f_A(x)$ המתארת כמה A מרוצה מחלק $[0, x]$

ישנה פונקציה $f_B(x)$ המתארת כמה B מרוצה מחלק $[x, 1]$

כלומר $f_A(0) = 0,\ f_A(1) > 0,\ f_B(0) > 0,\ f_B(1) = 0$

האם אפשר לחלק עוגה כך ששניהם יקבלו חלקים עם שווי זהה?

חלוקה הוגנת

מחלקים עוגה לשני אנשים A, B

ישנה פונקציה $f_A(x)$ המתארת כמה A מרוצה מחלק $[0, x]$

ישנה פונקציה $f_B(x)$ המתארת כמה B מרוצה מחלק $[x, 1]$

כלומר $f_A(0) = 0,\ f_A(1) > 0,\ f_B(0) > 0,\ f_B(1) = 0$

האם אפשר לחלק עוגה כך ששניהם יקבלו חלקים עם שווי זהה? כן!

נסמן

$$g(x) = f_A(x) - f_B(x)$$

ונשים לב

$$g(0) = -f_B(0) < 0,\ g(1) = f_A(1) > 0$$

ערך הביניים: תמיד קיים x כך ש $g(x) = 0$ כלומר $f_A(x) = f_B(x)$

עוד

א. פנקייקים וחיתוכים: אם יש שלושה פנקייקים בצלחת

אפשר לחלק כל אחד מהם לשני חלקים שווים ע״י חיתוך אחד ישר

עוד

א. פנקייקים וחיתוכם: אם יש שלושה פנקייקים בצלחת

אפשר לחלק כל אחד מהם לשני חלקים שווים ע"י חיתוך אחד ישר

ב. ילד גבוה מאוד זורק כדור...

שורשים

הגדרה: שורש של פונקציה f הוא x_0 כך ש $f(x_0) = 0$

טענה: ישנו x_0 כך ש $\cos(x_0) = x_0^3$

שורשים

הגדרה: שורש של פונקציה f הוא x_0 כך ש $f(x_0) = 0$

טענה: ישנו x_0 כך ש $\cos(x_0) = x_0^3$

הוכחה: נתבונן בפונקציה

$$f(x) = \cos(x) - x^3$$

זו פונקציה רציפה בתחום $[0, \pi/2]$ ומתקיים

$$f(0) = 1 - 0 = 1,\ f(\pi/2) = 0 - (\pi/2)^3 = -\pi^3/8$$

ממשפט ערך הביניים קיים x_0 כך ש $f(x_0) = 0$

נקודות שבת

הגדרה: נקודת שבת של פונקציה f היא x_0 כך ש $f(x_0) = x_0$

טענה: לכל $f : [0,1] \to [0,1]$ רציפה יש נקודת שבת

נקודות שבת

הגדרה: נקודות שבת של פונקציה f היא x_0 כך ש $f(x_0) = x_0$

טענה: לכל $f : [0,1] \to [0,1]$ רציפה יש נקודת שבת

הוכחה: נתבונן בפונקציה הרציפה

$$g(x) = f(x) - x$$

ונשים לב ש

$$g(0) = f(0) - 0 \geq 0,\ \ g(1) = f(1) - 1 \leq 0$$

לכן ממשפט ערך הביניים יש x_0 כך ש $g(x_0) = 0$ כלומר $f(x_0) = x_0$

תכונות

משפט: אם f רציפה בקטע הסגור $[a, b]$ אז f חסומה, כלומר קיים קבוע $C > 0$ כך שלכל $a \le x \le b$ מתקיים

$$|f(x)| \le C$$

דוגמא: הפונקציה $f(x) = x^2$ חסומה ע״י $C = 10$ בקטע $[-1, 2]$

תכונות

משפט: אם f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ אז f חסומה, כלומר קיים קבוע $C>0$ כך שלכל $a \le x \le b$ מתקיים

$$|f(x)| \le C$$

דוגמא: הפונקציה $f(x)=x^2$ חסומה ע״י $C=10$ בקטע $[-1,2]$

הערות:

א. ההנחה שהקטע סגור הכרחית; למשל $f(x)=\frac{1}{x}$ רציפה בקטע הפתוח $(0,1)$ אך לא חסומה בו

ב. ההנחה ש f רציפה גם כן הכרחית

קיצון

משפט: אם f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ אז ל־f יש מקסימום ומינימום בקטע,
כלומר קיימים $x_{min}, x_{max} \in [a,b]$ כך שלכל $a \le x \le b$ מתקיים

$$f(x_{min}) \le f(x) \le f(x_{max})$$

והתמונה של f היא הקטע $[f(x_{min}), f(x_{max})]$

דוגמא: לפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[-1,2]$ נבחר

$$x_{min} = \quad , \; x_{max} =$$

קיצון

משפט: אם f רציפה בקטע הסגור $[a, b]$ אז ל f יש מקסימום ומינימום בקטע,
כלומר קיימים $x_{min}, x_{max} \in [a, b]$ כך שלכל $a \leq x \leq b$ מתקיים

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

והתמונה של f היא הקטע $[f(x_{min}), f(x_{max})]$

דוגמא: לפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[-1, 2]$ נבחר

$$x_{min} = 0, \ x_{max} =$$

קיצון

משפט: אם f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ אז ל־f יש מקסימום ומינימום בקטע,
כלומר קיימים $x_{min}, x_{max} \in [a,b]$ כך שלכל $a \leq x \leq b$ מתקיים

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

והתמונה של f היא הקטע $[f(x_{min}), f(x_{max})]$

דוגמא: לפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[-1,2]$ נבחר

$$x_{min} = 0,\ x_{max} = 2$$

קיצון

משפט: אם f רציפה בקטע הסגור $[a, b]$ אז ל f יש מקסימום ומינימום בקטע,
כלומר קיימים $x_{min}, x_{max} \in [a, b]$ כך שלכל $a \leq x \leq b$ מתקיים

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

והתמונה של f היא הקטע $[f(x_{min}), f(x_{max})]$

דוגמא: לפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[-1, 2]$ נבחר

$$x_{min} = 0, \;\; x_{max} = 2$$

ואכן לכל x בתחום מתקיים $f(x_{min}) = 0 \leq f(x) \leq 4 = f(x_{max})$

קיצון

משפט: אם f רציפה בקטע הסגור $[a, b]$ אז ל f יש מקסימום ומינימום בקטע,
כלומר קיימים $x_{min}, x_{max} \in [a, b]$ כך שלכל $a \leq x \leq b$ מתקיים

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

והתמונה של f היא הקטע $[f(x_{min}), f(x_{max})]$

דוגמא: לפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[-1, 2]$ נבחר

$$x_{min} = 0, \; x_{max} = 2$$

ואכן לכל x בתחום מתקיים $f(x_{min}) = 0 \leq f(x) \leq 4 = f(x_{max})$

הערות:

א. ההנחה שהקטע סגור הכרחית; למשל ל $f(x) = \frac{1}{x}$ אין מקסימום בקטע הפתוח $(0, 1)$

ב. ההנחה ש f רציפה גם כן הכרחית

הופכית

טענה: אם $f:[a,b]\to[c,d]$ רציפה והפיכה אז $f^{-1}:[c,d]\to[a,b]$ גם רציפה

הופכית

טענה: אם $f:[a,b]\to[c,d]$ רציפה והפיכה אז $f^{-1}:[c,d]\to[a,b]$ גם רציפה

הסבר: הגרף של f^{-1} מתקבל מהגרף של f ע״י שיקוף ולכן אם גרף של f קו רציף אז גם של f^{-1} כזה

הופכית

טענה: אם $f:[a,b]\to[c,d]$ רציפה והפיכה אז $f^{-1}:[c,d]\to[a,b]$ גם רציפה

הסבר: הגרף של f^{-1} מתקבל מהגרף של f ע״י שיקוף ולכן אם גרף של f קו רציף
אז גם של f^{-1} כזה

דוגמא: $e^x:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ רציפה והפיכה ולכן $\ln(x):(0,\infty)\to\mathbb{R}$ רציפה

פונקציה למחשבה

רקע:

א. הרציונלים צפופים בממשיים, כלומר בין כל שני ממשיים שונים יש רציונלי

ב. גם האי-רציונליים צפופים בממשיים

ג. לכל מספר רציונלי יש הצגה מצומצמת $x = \frac{p}{q}$ כך ש $p + q$ קטן ביותר ו $q > 0$

פונקציה למחשבה

רקע:

א. הרציונלים צפופים בממשיים, כלומר בין כל שני ממשיים שונים יש רציונלי

ב. גם האי-רציונליים צפופים בממשיים

ג. לכל מספר רציונלי יש הצגה מצומצת $x = \frac{p}{q}$ כך ש $p+q$ קטן ביותר ו $q > 0$

פונקציית פופקורן: לכל x ממשי נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

פונקציה למחשבה

רקע:

א. הרציונלים צפופים בממשיים, כלומר בין כל שני ממשיים שונים יש רציונלי

ב. גם האי-רציונליים צפופים בממשיים

ג. לכל מספר רציונלי יש הצגה מצומצמת $x = \frac{p}{q}$ כך ש $p+q$ קטן ביותר ו $q > 0$

פונקציית פופקורן: לכל x ממשי נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

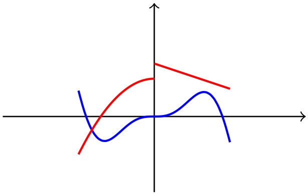
משפט: f רציפה באי-רציונליים ולא רציפה ברציונליים

הסבר?

סיכום

אינטואיציה: פונקציה f היא רציפה אם אפשר לצייר גרף שלה בלי להרים עט מדף

דוגמא: רציפה לא רציפה



הגדרה: הפונקציה f רציפה בנקודה x_0 אם $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

ראינו דוגמאות, תרגילים ושימושים