מבוא להסתברות ח׳

חלק 2

אמיר יהודיוף
הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

תזכורת

- מרחב הסתברות הוא שלשה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- תכונות נוספות (למשל הכלה-הדחה)
- התניה: כיצד מידע משנה תפישת עולם
- נוסחת הסתברות שלמה: שימוש בחלוקה של מרחב מדגם
- תלות וחוסר תלות בין מאורעות

משתנה מקרי

כשעורכים ניסוי, בד"כ מרכזים תוצאות באופן מספרי
למשל, כמה כסף הרווחנו/הפסדנו בלאס וגאס?

משתנה מקרי הוא פונקציה $X : \Omega \to \mathbb{R}$ כך שלכל $a \in \mathbb{R}$ הקבוצה

$$I_a := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \subseteq \Omega$$

שייכת ל $\mathcal{F}$

דוגמא: מטילים 3 קוביות הוגנות ומגדירים את X להיות סכום תוצאות ההטלות:

$$X((i, j, k)) = i + j + k$$

ולמשל

$$I_0 = \emptyset, \; I_{3.1} = \{(1, 1, 1)\}$$
$$I_4 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$$

הגדרה: משתנה מקרי הוא פונקציה $X : \Omega \to \mathbb{R}$ כך שלכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$$

הערה: משתנה מקרי מגדיר באופן טבעי מרחב הסתברות על הישר הממשי עם

- $\Omega_X = \mathbb{R}$
- $\mathcal{F}_X$ אוסף תת קבוצות של ישר ממשי (למשל קטעים)
- $\mathbb{P}_X$ מוגדרת על ידי

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$$

משתנה מקרי בדיד

הגדרה: משתנה מקרי X הוא בדיד אם לכל ערך x ש X יכול לקבל, מתקיים
$$\mathbb{P}(X = x) > 0$$

הערה: במקרה זה X יכול לקבל רק מספר בן מניה של ערכים, כלומר קיימים $i_1, i_2, i_3, \ldots$ כך ש X מקבל רק ערכים בסדרה זו

ציור של $\mathbb{R}$ מול $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ עבור מ״מ בדיד X שמקבל ערכים $i_1, i_2, i_3, \ldots$

דוגמאות

להרבה משתנים מיקריים נתאים סיפור

משתנה מקרי ברנולי: נערך ניסוי אחד עם סיכוי הצלחה p

הגדרה: לכל $0 \leq p \leq 1$ משתנה מקרי $X \sim Ber(p)$ מוגדר כך: לכל $b \in \{0, 1\}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X = b) = \begin{cases} p & b = 1 \\ 1 - p & b = 0 \end{cases}$$

מהם בעצם מרחב המדגם, המאורעות ופונקציית ההסתברות?

$$\Omega = \{0, 1\},$$
$$\mathcal{F} = 2^{\Omega} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \Omega\},$$
$$\mathbb{P}_X(\emptyset) = 0, \quad \mathbb{P}_X(\{0\}) = 1 - p, \quad \mathbb{P}_X(\{1\}) = p, \quad \mathbb{P}_X(\{0, 1\}) = 1$$

דוגמאות

משתנה מקרי בינומי: נערכים n ניסויים בלתי תלויים וסיכוי הצלחה של כל אחד הוא p. מהם כמות הניסויים שהצליחו?

הגדרה: לכל $0 \le p \le 1$ ו $n \in \mathbb{N}$ מ"מ בינומי $X \sim B(n,p)$ מוגדר כך:
לכל $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

תזכורת: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ הוא מספר הדרכים לבחור k עצמים מתוך n

מהם בעצם מרחב המדגם, המאורעות ופונקציית ההסתברות?

$$\Omega = \{0,1,\dots,n\}, \qquad \mathcal{F} = 2^{\Omega}, \qquad \mathbb{P}_X(A) = \sum_{k\in A} \mathbb{P}(X=k)$$

משתנה מקרי בינומי

$X \sim B(n,p)$: לכל $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

נוודא שתכונות מתקיימות עבור מרחב הסתברות:

חיוביות: $\mathbb{P}_X(A) \geq 0$

סכום כולל: נשתמש בנוסחת הבינום

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1$$

חיבוריות: אם $A, B \subseteq \Omega$ מאורעות זרים אז

$$\mathbb{P}_X(A \cup B) = \sum_{k \in A \cup B} \mathbb{P}_X(k) = \sum_{k \in A} \mathbb{P}_X(k) + \sum_{k \in B} \mathbb{P}_X(k) = \mathbb{P}_X(A) + \mathbb{P}_X(B)$$

משתנה מקרי בינומי

$X \sim B(n,p)$: לכל $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

מהו k שמתקבל בסיכוי גבוה ביותר?

עבור אילו k מתקיים $\mathbb{P}(k+1) \geq \mathbb{P}(k)$?

נחשב

$$\frac{\mathbb{P}_X(k+1)}{\mathbb{P}_X(k)} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$$

לכן

$$\frac{\mathbb{P}_X(k+1)}{\mathbb{P}_X(k)} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad k \leq pn - 1$$

מסקנה: $\mathbb{P}_X(k)$ זו סדרה אונימודלית (עולה ואז יורדת) עם מקסימום בסביבות pn

משתנה מקרי בינומי

הגדרה נוספת: יהיו $\Omega = \{0,1\}^n$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ ולכל $v \in \Omega$ עם בדיוק k אחדים, נגדיר

$$\mathbb{P}(v) = p^k(1-p)^{n-k}$$

ניתן להגדיר $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ בינומי על ידי: $Y(v)$ הוא מספר האחדים ב v ואכן

$$\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{v:\, Y(v)=k} \mathbb{P}(v) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

במילים: הוקטור v מייצג את רשימת ההצלחות/כשלונות בכל הניסויים והמשתנה המקרי Y סופר את כמות הצלחות

מסקנה: משתנה מקרי יכול "לנבוע" מכמה מרחבי הסתברות שונים

משתנה מקרי גיאומטרי

סיפור: מספר הכשלונות לפני הצלחה ראשונה כאשר סיכוי הצלחה הוא p

הגדרה: לכל $0 < p \leq 1$ נגדיר $X \sim Geom(p)$ כך: לכל $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^k \cdot p$$

(במילים: היו k כשלונות ואז הצלחה)

זוהי אכן פונקציית הסתברות: חיוביות וחיבוריות מהגדרה, ו

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k p = p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

מכיוון ש $p > 0$

משתנה מקרי גיאומטרי

$X \sim Geom(p)$: לכל $k \in \{0,1,\ldots\}$, $\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^k p$

תכונת חוסר זכרון: לכל $k, \ell \geq 0$ שלמים,

$$\mathbb{P}(X = k+\ell | X \geq \ell) = \mathbb{P}(X=k) = (1-p)^k p$$

הוכחה:

$$\mathbb{P}(X \geq \ell) = \sum_{m=\ell}^{\infty} (1-p)^m p = (1-p)^\ell p \sum_{m=0}^{\infty} (1-p)^m = (1-p)^\ell$$

וגם

$$\mathbb{P}(X = k+\ell, X \geq \ell) = \mathbb{P}(X = k+\ell) = (1-p)^{k+\ell} p$$

ולכן

$$\mathbb{P}(X = k | X \geq \ell) = \frac{(1-p)^{k+\ell} p}{(1-p)^\ell}$$

משתנה מקרי פואסוני (2)

סיפור: כמה פעמים ישנה התרחשות בפרק זמן נתון (למשל, כמה שיחות טלפון בשעה)

הגדרה: לכל $\lambda > 0$ נגדיר $X \sim Pois(\lambda)$ כך: לכל $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

אינטואיציה: λ מייצג מספר ממוצע של התרחשויות

דוגמא היסטורית: בספר של בורטיקייביץ' מסוף מאה 19 משתנה מקרי פואסוני ממדל את מספר החיילים הפרוסים הנהרגים מדי שנה מבעיטה של סוס $\lambda = 0.61$

פואסוני כגבול של בינומים

סיבה להגדרה: נניח שמתעניינים במספר שיחות טלפון בשעה

נחלק שעה ל n חלקים ונניח ל n לשאוף לאינסוף. לכל n נרצה λ שיחות בממוצע ולכן בהנחה ששתי שיחות לא מתרחשות באותו חלק (סביר עבור n גדול):
נחשוב על $X_n \sim B(n, \lambda/n)$ כמקרב את $X \sim Pois(\lambda)$

עתה לכל k קבוע מתקיים

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k}(\lambda/n)^k(1-\lambda/n)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot(1-\lambda/n)^{-k}\cdot(1-\lambda/n)^n \\ &\underset{n\to\infty}{\to} 1\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot 1\cdot e^{-\lambda} = \mathbb{P}(X=k)\end{aligned}$$

משתנה מקרי פואסוני : תת אינטרוולים

סיפור: כמה התרחשויות קרו בזמן $[0, t]$ עבור $t > 0$

הגדרה: $X \sim Pois(\lambda)$ אם לכל $k \in \{0, 1, \ldots\}$ מתקיים $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

מה לגבי פרק הזמן $[0, t/2]$ או פרקי זמן אחרים?

תכונה: לכל התחלה של הזמן $t' \in [0, t]$ מספר ההתרחשויות שקורות בזמן $[0, t']$ הוא פואסוני עם פרמטר $\lambda \cdot \frac{t'}{t}$

היפר-גיאומטרי

סיפור: ישנם n אנשים ול k מתוכם ישנה תכונה Y . בוחרים ℓ אנשים באקראי.
לכמה מהם יש תכונה Y ?

הגדרה: $X \sim HypGeo(n, k, \ell)$ אם לכל $0 \leq m \leq \min(k, \ell)$ שלם מתקיים

$$\mathbb{P}(X = m) = \frac{\binom{k}{m}\binom{n-k}{\ell-m}}{\binom{n}{\ell}}$$

ולכל m אחר מתקיים $\mathbb{P}(X = m) = 0$

תרגיל: לבדוק שאכן כל תכונות דרושות מתקיימות
למשל נירמול עם מוסכמה $\binom{a}{b} = 0$ אם $b < 0$ או $b > a$

בינומי שלילי

סיפור: עורכים סדרה אינסופית של ניסויים בלתי תלויים וכל אחד מצליח בסיכוי p. נקבע r ונשאל מה מספר הצלחות עד שרואים $r>0$ כשלונות?

הגדרה: $X \sim NegBin(p,r)$ אם לכל k שלם אי-שלילי

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{k+r-1}{k} \cdot p^k (1-p)^r$$

ולכל k אחר $\mathbb{P}(X=k)=0$

במילים: בוחרים אילו מ $k+r$ ניסויים שנערכו פרט לאחרון הצליחו (כל השאר נכשלו) ואז מה סיכוי שזה יקרה. מדוע פרט לאחרון? כי ניסוי אחרון נכשל

סיכום ביניים

הגדרות בסיסיות: מרחבי הסתברות ותכונותיהם, התניה, חוסר תלות

משתנים מקריים:

בדידים (בינומי, גיאומטרי, פואסוני, היפר-גיאומטרי, בינומי שלילי,...)

קיימת קבוצה בת מניה I שבה X מקבל ערכים, למשל $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$

לכל $i \in I$ מגדירים $\mathbb{P}(X = i) = p_i > 0$

אוסף המאורעות הוא $\mathcal{F} = \in^{\mathcal{I}}$

לכל תת קבוצה $A \subseteq I$ מגדירים $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{i \in A} p_i$

משתנים מקריים רציפים

נרצה גם להבין משתנים מקריים שיכולים לקבל מספר רציף של ערכים

הגדרה: משתנה מקרי X הוא רציף אם קיימת פונקציה אינטגרבילית $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ כך שלכל $a \leq b$ ממשיים מתקיים

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(y)dy$$

הפונקציה f_X נקראת הצפיפות של X (והיא בעצם מגדירה את המשתנה המקרי)

הערות: הפונקציה f_X אינה יחידה, היא "מודדת את השינוי ב $\mathbb{P}_X$" ומתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(y)dy = 1$$

לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{P}(X = a) = 0$

דוגמאות: אחיד

סיפור: נקודה אחידה בקטע

הגדרה: לכל $a < b$ ממשיים, נגדיר $X \sim U[a, b]$ על ידי

$$f_X(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & y \in [a, b] \\ 0 & y \notin [a, b] \end{cases}$$

מסקנה (הסיכוי להיות בקטע ביחס ישר לאורכו): לכל $[c, d] \subseteq [a, b]$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \in [c, d]) = \int_c^d f_X(y)dy = \int_c^d \frac{1}{b-a}dy = \frac{d-c}{b-a}$$

(בפרט נירמול נכון $\mathbb{P}(X \in [a, b]) = 1$)

דוגמאות: (אקספוננציאלי) מעריכי

סיפור: זמן עד ששעון מעורר מקרי מצלצל

הגדרה: לכל $\lambda > 0$ נגדיר $X \sim Exp(\lambda)$ על ידי

$$f_X(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

תכונה: לכל $a > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X > a) = \int_a^\infty \lambda e^{-\lambda y} dy = \; = -e^{-\lambda y}\Big|_a^\infty = \; = 0 - (-e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a}$$

(בפרט נרמול נכון)

שימושי: בתיאור תורים (בדואר, במחשב,...)

מעריכי: חוסר זכרון

סיפור: זמן עד ששעון מעורר מקרי מצלצל

טענה: משתנה מעריכי הוא חסר זכרון, כלומר לכל $s, t \geq 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

הוכחה:

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X > t)$$

להיפך: אם X משתנה מקרי רציף חסר זכרון כך ש $\mathbb{P}(X > 0) = 1$ אז X מעריכי

הערה: אם מסתכלים על חוסר זכרון ביחס לשלמים, מקבלים משתנה גיאומטרי

פואסוני ומעריכי

ניתן היה להגדיר משתנה מקרי $Y \sim Pois(\lambda)$ כך:

יהיו $X_1, X_2, \ldots \sim Exp(\lambda)$ בלתי תלויים (בהמשך נגדיר משמעות פורמלית)

נגדיר Y כמספר ה"שעונים" שצילצלו בזמן $[0,1]$, כלומר

$$Y = \min\{n - 1 : X_1 + X_2 + \ldots + X_n > 1\}$$

(נחכה ששעון ראשון יצלצל ואז נחכה לשני ואז לשלישי עד שיגמר הזמן)

ואז

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X_1 > 1) = e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!}$$

ובאופן כללי $\mathbb{P}(Y = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

נורמלי (גאוסי)

סיפור: עקומת פעמון (מופיעה בהרבה מאוד מקרים - משפט הגבול המרכזי)

הגדרה: בהנתן $\mu, \sigma^2 \in \mathbb{R}$ נגדיר $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ על ידי

$$f_X(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

מה μ, σ קובעים?

μ - "שיא" הפעמון, ו σ - "רוחב" הפעמון

הגדרה: $X \sim N(0,1)$ נקרא נורמלי תיקני

בהמשך נוכיח: אם $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ אז $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

בינומי: תכונות

אם $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $f_X(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

נגזרת ראשונה: $\frac{df_X}{dy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{(y-\mu)}{\sigma^2}\right)$

נגזרת שניה:

$$\frac{d^2 f_X}{dy^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[\left(\frac{(y-\mu)}{\sigma^2}\right)^2 - \frac{1}{\sigma^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\sigma^2} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left[\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2} - 1\right]$$

מסקנות: א. בנקודה $y = \mu$ יש מקסימום גלובלי: מקסימום הפעמון
ב. בנקודות $y = \mu \pm \sigma$ הנגזרת השניה היא 0 (במרכז קעור ובצדדים קמור):
רוחב הפעמון

הופעת פיי

אם $X \sim N(0,1)$ $f_X(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$

מאיפה מגיע שורש פיי?

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = ?$$

אין נוסחה כללית לאינטגרל זה, אבל עם גבולות מסוימים אלו:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y^2+z^2)/2} dydz \underset{r=\sqrt{x^2+y^2}, \tan\theta = y/x}{=}$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2/2} r d\theta dr = \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = 1 \cdot 2\pi$$

סיכום ביניים

הגדרות בסיסיות: מרחבי הסתברות ותכונותיהם, התניה, חוסר תלות

משתנים מקריים: $X : \Omega \to \mathbb{R}$ עם תכונות "מדידות"

בדידים: מספר בן מניה של ערכים

- בינומי: כמה ניסויים הצליחו
- גיאומטרי: מספר ניסויים עד כשלון ראשון
- פואסוני: מספר התרחשויות בשעה
- בינומי שלילי: מספר הצלחות עד r כשלונות

רציפים: מוגדרים על ידי צפיפות

- אחיד: זורקים חץ לתוך קטע
- מעריכי: זמן עד שאלקטרון נפלט
- נורמלי: פעמון

יש עוד הרבה ...