מתמטיקה למדעי החיים

גבולות

אמיר יהודיוף

הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

גבול

מושג הגבול הוא אחד הבסיסיים במתמטיקה

הגדרתו קשורה באופן עמוק למהפכה המדעית:

בסיס להגדרת נגזרת, אינטגרל, ...

רעיון: הגבול מתאר התנהגות של סדרת עצמים שהולכת ומתקרבת לעצם שמעניין אותנו

הגדרה: לא בחומר

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ויהי $x_0\in\mathbb{R}$

הגדרה: הגבול של f בנקודה x_0 קיים אם קיים מספר $L\in\mathbb{R}$ כך שלכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ המקיים

$$|x-x_0|\leq\delta$$

מתקיים

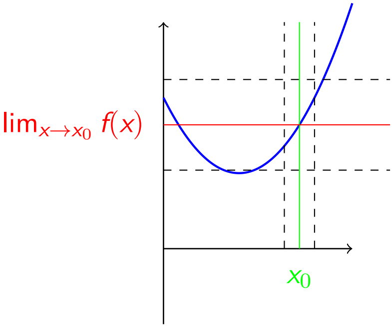
$$|f(x)-L|\leq\epsilon$$

רעיון

רעיון: הגבול של f בנקודה x_0 הוא ערך L כך שאם x קרוב ל x_0 אז $f(x)$ קרוב ל L

הערה: לא תמיד הגבול קיים

סימון: הגבול של f בנקודה x_0 מסומן $\lim_{x\to x_0} f(x)$, אם הוא קיים



דוגמאות בסיסיות

רעיון: אם x קרוב ל x_0 אז $f(x)$ קרוב ל $\lim_{x\to x_0} f(x)$

1. $\lim_{x\to 0} 1 =$
2. $\lim_{x\to 2} x =$
3. $\lim_{x\to 1} x^2 - 1 =$
4. $\lim_{x\to 1} \lfloor x \rfloor =$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} =$

דוגמאות בסיסיות

רעיון: אם x קרוב ל x_0 אז $f(x)$ קרוב ל $f(x)$ $\lim_{x\to x_0}$

1. $\lim_{x\to 0} 1 = 1$
2. $\lim_{x\to 2} x =$
3. $\lim_{x\to 1} x^2 - 1 =$
4. $\lim_{x\to 1} \lfloor x \rfloor =$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} =$

דוגמאות בסיסיות

רעיון: אם x קרוב ל x_0 אז $f(x)$ קרוב ל $\lim_{x\to x_0} f(x)$

1. $\lim_{x\to 0} 1 = 1$

2. $\lim_{x\to 2} x = 2$

3. $\lim_{x\to 1} x^2 - 1 =$

4. $\lim_{x\to 1} \lfloor x \rfloor =$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} =$

דוגמאות בסיסיות

רעיון: אם x קרוב ל x_0 אז $f(x)$ קרוב ל $\lim_{x \to x_0} f(x)$

1. $\lim_{x \to 0} 1 = 1$

2. $\lim_{x \to 2} x = 2$

3. $\lim_{x \to 1} x^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$

4. $\lim_{x \to 1} \lfloor x \rfloor =$

5. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} =$

דוגמאות בסיסיות

רעיון: אם x קרוב ל x_0 אז $f(x)$ קרוב ל $\lim_{x\to x_0} f(x)$

1. $\lim_{x\to 0} 1 = 1$
2. $\lim_{x\to 2} x = 2$
3. $\lim_{x\to 1} x^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$
4. $\lim_{x\to 1} \lfloor x \rfloor =$ לא קיים
5. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} =$

דוגמאות בסיסיות

רעיון: אם x קרוב ל x_0 אז $f(x)$ קרוב ל $\lim_{x\to x_0} f(x)$

1. $\lim_{x\to 0} 1 = 1$

2. $\lim_{x\to 2} x = 2$

3. $\lim_{x\to 1} x^2 - 1 = 1^2 - 1 = 0$

4. $\lim_{x\to 1} \lfloor x \rfloor =$ לא קיים

5. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} =$ לא קיים

דוגמאות

1. $\lim_{x\to x_0} 1 = 1$
2. $\lim_{x\to x_0} x = x_0$
3. $\lim_{x\to x_0} x^2 = x_0^2$
4. $\lim_{x\to x_0} x^3 = x_0^3$

5. לכל $a > 0$ ולכל $x_0 \geq 0$ מתקיים $\lim_{x\to x_0} x^a = x_0^a$

6. $\lim_{x\to x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$
7. $\lim_{x\to x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$

חוקי חשבון

אם ידוע שיש גם ל f וגם ל g גבול ב x_0 אז

$$\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) + \left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-g(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) - \left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)$$

ואם $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ אז

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

חוקי חשבון: דוגמאות

1. $\lim_{x\to 2} x^2 =$

2. $\lim_{x\to 3} x^2 - x =$

3. $\lim_{x\to -1}(x^2 - x)\cdot(x+2)^3 =$

4. $\lim_{x\to 0} \tan(x) =$

חוקי חשבון: דוגמאות

1. $\lim_{x\to 2} x^2 = \lim_{x\to 2} x\cdot x = \left(\lim_{x\to 2} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 2} x\right) = 2\cdot 2 = 2^2 = 4$

2. $\lim_{x\to 3} x^2 - x =$

3. $\lim_{x\to -1}(x^2 - x)\cdot(x+2)^3 =$

4. $\lim_{x\to 0} \tan(x) =$

חוקי חשבון: דוגמאות

1. $\lim_{x\to 2} x^2 = \lim_{x\to 2} x\cdot x = \left(\lim_{x\to 2} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 2} x\right) = 2\cdot 2 = 2^2 = 4$

2. $\lim_{x\to 3} x^2 - x = \left(\lim_{x\to 3} x^2\right) - \left(\lim_{x\to 3} x\right) = 3^2 - 3 = 6$

3. $\lim_{x\to -1}(x^2 - x)\cdot(x+2)^3 =$

4. $\lim_{x\to 0} \tan(x) =$

חוקי חשבון: דוגמאות

1. $\lim_{x\to 2} x^2 = \lim_{x\to 2} x\cdot x = \left(\lim_{x\to 2} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 2} x\right) = 2\cdot 2 = 2^2 = 4$

2. $\lim_{x\to 3} x^2 - x = \left(\lim_{x\to 3} x^2\right) - \left(\lim_{x\to 3} x\right) = 3^2 - 3 = 6$

3. $\lim_{x\to -1}(x^2 - x)\cdot(x+2)^3 = ((-1)^2 - (-1))\cdot(-1+2)^3 = 2\cdot 1 = 2$

4. $\lim_{x\to 0} \tan(x) =$

חוקי חשבון: דוגמאות

1. $\lim_{x\to 2} x^2 = \lim_{x\to 2} x\cdot x = \left(\lim_{x\to 2} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 2} x\right) = 2\cdot 2 = 2^2 = 4$

2. $\lim_{x\to 3} x^2 - x = \left(\lim_{x\to 3} x^2\right) - \left(\lim_{x\to 3} x\right) = 3^2 - 3 = 6$

3. $\lim_{x\to -1}(x^2 - x)\cdot(x+2)^3 = ((-1)^2 - (-1))\cdot(-1+2)^3 = 2\cdot 1 = 2$

4. $\lim_{x\to 0} \tan(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$

חוק נוסף

אם ידוע שיש גם ל f גבול ב x_0 והגבול הוא אי שלילי אז

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to x_0}f(x)}$$

דוגמא:

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{2-x}=\sqrt{\lim_{x\to 1}2-x}=\sqrt{2-1}=1$$

יש עוד חוקים דומים

אינסוף

האינסוף ∞ גדול יותר מכל מספר ממשי (והוא לא מספר)

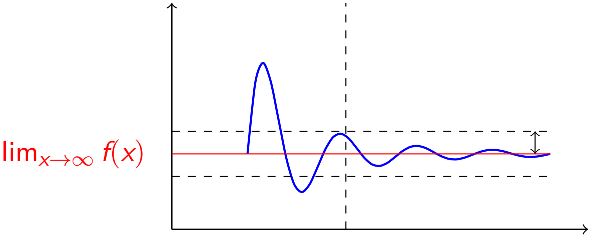
"חוקי חשבון":

1. לכל מספר ממשי $x > 0$ מתקיים $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty$
2. לכל מספר ממשי x מתקיים $x + \infty = \infty + x = \infty$
3. לכל מספר ממשי x מתקיים $\frac{x}{\infty} = 0$
4. $\infty + \infty = \infty \cdot \infty = \infty$
5. $\infty - \infty = ?$
6. $0 \cdot \infty = ?$
7. $\frac{\infty}{\infty} = ?$

במקרים $5, 6, 7$ יש להשקיע עוד מחשבה

גבול באינסוף

הגבול של f ב ∞ הוא $\lim_{x\to\infty} f(x)$ אם כש x הולך וגדל $f(x)$ הולך ומתקרב ל $\lim_{x\to\infty} f(x)$



באופן ציורי: הגרף של f הולך ומתקרב לישר $y = \lim_{x\to\infty} f(x)$

דוגמאות

רעיון: אם x גדול אז $f(x)$ קרוב ל $\lim_{x\to\infty} f(x)$

1. $\lim_{x\to\infty} 1 =$

2. $\lim_{x\to\infty} x =$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} =$

4. $\lim_{x\to\infty} \sin(x) =$

דוגמאות

רעיון: אם x גדול אז $f(x)$ קרוב ל $\lim_{x\to\infty} f(x)$

1. $\lim_{x\to\infty} 1 = 1$
2. $\lim_{x\to\infty} x =$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} =$
4. $\lim_{x\to\infty} \sin(x) =$

דוגמאות

רעיון: אם x גדול אז $f(x)$ קרוב ל $\lim_{x\to\infty} f(x)$

1. $\lim_{x\to\infty} 1 = 1$

2. $\lim_{x\to\infty} x = \infty$

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} =$

4. $\lim_{x\to\infty} \sin(x) =$

דוגמאות

רעיון: אם x גדול אז $f(x)$ קרוב ל $\lim_{x\to\infty} f(x)$

1. $\lim_{x\to\infty} 1 = 1$
2. $\lim_{x\to\infty} x = \infty$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
4. $\lim_{x\to\infty} \sin(x) =$

דוגמאות

רעיון: אם x גדול אז $f(x)$ קרוב ל $\lim_{x\to\infty} f(x)$

1. $\lim_{x\to\infty} 1 = 1$
2. $\lim_{x\to\infty} x = \infty$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
4. $\lim_{x\to\infty} \sin(x) =$ לא קיים

דוגמאות בסיסיות

1. $\lim_{x\to\infty} 1 = 1$
2. $\lim_{x\to\infty} x = \infty$
3. $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$
4. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

5. לכל $a > 0$ מתקיים $\lim_{x\to\infty} x^a = \infty$
6. לכל $a > 0$ מתקיים $\lim_{x\to\infty} x^{-a} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^a} = 0$

חוקים

אותם חוקים כמו לגבול בנקודה, למשל אם ידוע שיש גם ל f וגם ל g גבול ב ∞ אז

$$\lim_{x\to\infty} f(x)+g(x) = \left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right) + \left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right)$$

באופן דומה גם חיסור, כפל, שורש, ...

חוקי חשבון: דוגמאות

1. $$\lim_{x\to\infty} x-1 =$$

2. $$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}+3} =$$

3. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+x-2}{2x^4+x^3} =$$

חוקי חשבון: דוגמאות

1.
$$\lim_{x\to\infty} x-1 = \left(\lim_{x\to\infty} x\right) - \left(\lim_{x\to\infty} 1\right) = \text{``}\infty - 1\text{''} = \infty$$

2.
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}+3} =$$

3.
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+x-2}{2x^4+x^3} =$$

חוקי חשבון: דוגמאות

1. $$\lim_{x\to\infty} x - 1 = \left(\lim_{x\to\infty} x\right) - \left(\lim_{x\to\infty} 1\right) = \text{``}\infty - 1'' = \infty$$

2. $$\lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{x} + 3} = \text{``}\frac{1}{\infty}\text{''} = 0$$

3. $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x - 2}{2x^4 + x^3} =$$

חוקי חשבון: דוגמאות

1.
$$\lim_{x\to\infty} x-1 = \left(\lim_{x\to\infty} x\right) - \left(\lim_{x\to\infty} 1\right) = \text{``}\infty - 1'' = \infty$$

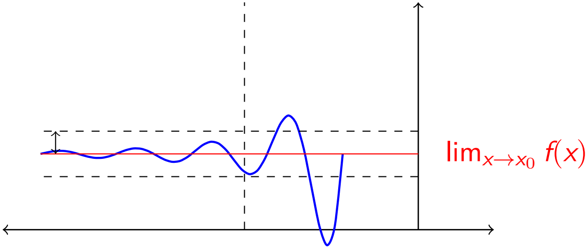
2.
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}+3} = \text{``}\frac{1}{\infty}\text{''} = 0$$

3.
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+x-2}{2x^4+x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1+0-0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

הערה: אם לא מפתחים חישוב מקבלים ביטוי חסר משמעות $\frac{\infty}{\infty}$

גבול במינוס אינסוף

הגבול של f ב $-\infty$ הוא $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ אם כש x הולך ומתקרב ל $-\infty$ אז $f(x)$ מתקרב ל $\lim_{x\to-\infty} f(x)$



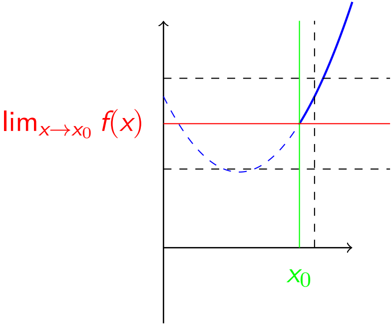
סימטרי לחלוטין לגבול באינסוף

גבולות חד צדדיים

גבול מימין:

אם x קרוב ל x_0 מימין (כלומר $x > x_0$) אז $f(x)$ קרוב ל $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$

ההבדל בסימון: הפלוס



באופן דומה נגדיר גבול משמאל $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$

דוגמאות

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} =$
2. $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} =$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} =$
4. $\lim_{x\to 1^+} \lfloor x \rfloor =$
5. $\lim_{x\to 1^-} \lfloor x \rfloor =$

הערה: חוקי חשבון וכו' מתקיימים גם לגבולות חד-צדדיים

דוגמאות

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} =$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} =$
4. $\lim_{x\to 1^+} \lfloor x \rfloor =$
5. $\lim_{x\to 1^-} \lfloor x \rfloor =$

הערה: חוקי חשבון וכו' מתקיימים גם לגבולות חד-צדדיים

דוגמאות

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} =$
4. $\lim_{x\to 1^+} \lfloor x \rfloor =$
5. $\lim_{x\to 1^-} \lfloor x \rfloor =$

הערה: חוקי חשבון וכו' מתקיימים גם לגבולות חד-צדדיים

דוגמאות

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} =$ לא קיים
4. $\lim_{x\to 1^+} \lfloor x \rfloor =$
5. $\lim_{x\to 1^-} \lfloor x \rfloor =$

הערה: חוקי חשבון וכו' מתקיימים גם לגבולות חד-צדדיים

דוגמאות

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} =$ לא קיים
4. $\lim_{x\to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$
5. $\lim_{x\to 1^-} \lfloor x \rfloor =$

הערה: חוקי חשבון וכו' מתקיימים גם לגבולות חד-צדדיים

דוגמאות

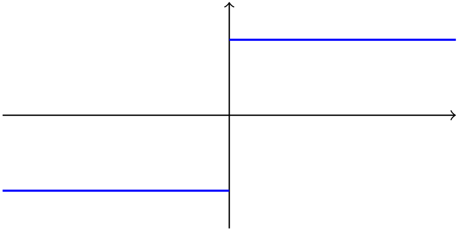
1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} =$ לא קיים
4. $\lim_{x\to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$
5. $\lim_{x\to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0$

הערה: חוקי חשבון וכו' מתקיימים גם לגבולות חד-צדדיים

באופן גרפי

הגבולות החד-צדדים של $f(x) = \frac{|x|}{x}$ באפס קיימים אבל הגבול לא קיים

הערה: הפונקציה לא מוגדרת בנקודה אפס



סנדוויץ

משפט (הסנדוויץ): אם

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

ואם

$$L = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$$

אז

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

ובדומה לגבולות באינסוף וחד-צדדיים

הסבר: אם $g(x)$ קרוב ל L וגם $h(x)$ קרוב ל L אז בהכרח גם $f(x)$ קרוב ל L

שימוש: "0/0"

טענה: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

שימוש: "$0/0$"

טענה: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

הסבר:

א. ראינו שלכל $x \in [0,\pi/2)$ מתקיים $\sin(x) \le x \le \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

שימוש: "0/0"

טענה: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

הסבר:

א. ראינו שלכל $x \in [0, \pi/2)$ מתקיים $\sin(x) \le x \le \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

ב. נעביר אגפים ונקבל

$$\cos(x) \le \frac{\sin(x)}{x} \le 1$$

שימוש: "0/0"

טענה: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

הסבר:

א. ראינו שלכל $x \in [0, \pi/2)$ מתקיים $\sin(x) \leq x \leq \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

ב. נעביר אגפים ונקבל

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

ג. נשים לב:

$$\lim_{x\to 0^+} \cos(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

שימוש: "0/0"

טענה: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

הסבר:

א. ראינו שלכל $x \in [0, \pi/2)$ מתקיים $\sin(x) \le x \le \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

ב. נעביר אגפים ונקבל

$$\cos(x) \le \frac{\sin(x)}{x} \le 1$$

ג. נשים לב:

$$\lim_{x\to 0^+} \cos(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

ד. ממשפט הסנדוויץ':

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

מסקנות

ידוע:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

מסקנות:

1. $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} =$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} =$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x} =$

מסקנות

ידוע:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

מסקנות:

1. $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} =$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x} =$

מסקנות

ידוע:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

מסקנות:

1. $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x} =$

מסקנות

ידוע:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

מסקנות:

1. $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \cdot 1 = 1$

עוד מסקנות

בעיה: מהו $\lim_{x\to\infty}(2^x+3^x)^{1/x}$?

עוד מסקנות

בעיה: מהו $\lim_{x\to\infty}(2^x+3^x)^{1/x}$?

פתרון:

א. נרשום

$$3=(3^x)^{1/x}\le(2^x+3^x)^{1/x}\le(2\cdot 3^x)^{1/x}=2^{1/x}\cdot 3$$

ב. נחשב

$$\lim_{x\to\infty}2^{1/x}=2^0=1$$

ג. ממשפט סנדויץ

$$\lim_{x\to\infty}(2^x+3^x)^{1/x}=3$$

"∞^0"

טענה: $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$

“∞^0”

טענה: $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$

דרך לנחש: לחשב $100^{1/100} \approx 1.04712854805$

“∞^0”

טענה: $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$

דרך לנחש: לחשב $100^{1/100} \approx 1.04712854805$

נראה (לשם פשטות) שעבור הטבעיים מתקיים $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$

“∞^0”

טענה: $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$

דרך לנחש: לחשב $100^{1/100} \approx 1.04712854805$

נראה (לשם פשטות) שעבור הטבעיים מתקיים $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$

א. נשים לב שאם n גדול אז

$$1 \le n^{1/n} \le 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

אכן, צד שמאל ברור וצד ימין נובע מנוסחת הבינום של ניוטון:

$$\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{4}{n} + \cdots \ge 2(n-1) \ge n$$

ב. משפט הסנדוויץ' מסיים הוכחה

e

ישנו מספר שמופיע לרוב בטבע וניתן לתארו על ידי גבול: e

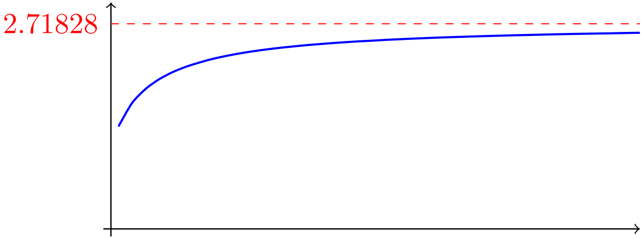
ישנו מספר שמופיע לרוב בטבע וניתן לתארו על ידי גבול: e

הגדרה:

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

הגבול קיים כי הפונקציה $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ עולה וחסומה

לא נוכיח, אבל נצייר



עוד על e

הגדרנו $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ובאופן דומה:

1. $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$
2. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} =$
3. $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x =$$

עוד על e

הגדרנו $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ובאופן דומה:

1. $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

2. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} =$

3. $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x =$$

עוד על e

הגדרנו $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ובאופן דומה:

1. $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

2. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

3.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=$$

עוד על e

הגדרנו $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ובאופן דומה:

1. $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
2. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$
3. $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}$$

עוד על e

הגדרנו $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ובאופן דומה:

1. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/x} =$
2. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x =$

עוד על e

הגדרנו $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ובאופן דומה:

1. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/x} = \left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right)^2 = e^2$
2. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x =$

עוד על e

הגדרנו $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ובאופן דומה:

1. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{2/x} = \left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right)^2 = e^2$
2. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x/a}\right)^a = e^a$

סיכום

דיברנו על מושג הגבול

ראינו דוגמאות בסיסיות

ראינו כלים שעוזרים בחישוב גבולות (חשבון וסנדוויץ)

נתחיל להשתמש בו