מבוא להסתברות ח'

חלק 1

אמיר יהודיוף
הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

מבוא

תהליכים אקראיים:

1 למדל (פיסיקה, ביולוגיה, כלכלה, אינטרנט...)

2 לחקור (באופן מתמטי)

3 להשתמש (למצוא תבניות, לצפות תוצאות...)

שיעור - בעיקר תאוריה

תרגול/תרגילים - יעזרו להבנה וליכולת להשתמש

להשקיע מחשבה לבד, לדון עם חברים, לכתוב לבד/בזוג

moodle: דף מידע, תרגילים, הודעות...

מרחב הסתברות

(הגדרה מתמטית: נתינת משמעות למילים, ומאפשרת דיון מדויק)

הגדרה: מרחב הסתברות הוא שלשה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Ω מרחב המדגם
$\mathcal{F}$ אוסף המאורעות
$\mathbb{P}$ מידת הסתברות

דוגמא: הטלת מטבע הוגן
מרחב המדגם: קבוצת כל התוצאות האפשריות $\Omega = \{H, T\}$
אוסף המאורעות: אוסף תת קבוצות של תוצאות $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{H\}, \{T\}, \{H, T\}\}$
מידת הסתברות: הסתברות לכל מאורע
$\mathbb{P}(\emptyset) = 0,\ \mathbb{P}(\{H\}) = 1/2,\ \mathbb{P}(\{T\}) = 1/2,\ \mathbb{P}(\{H, T\}) = 1$

מאורעות

מרחב המדגם Ω הוא קבוצה

הגדרה: אוסף המאורעות $\mathcal{F}$ הוא אוסף של תת קבוצות של Ω (לא בהכרח כולן) כך ש:

1 $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$

2 סגור לאיחוד, חיתוך והפרש:

$$A, B \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{F}$$

3 סגור לאיחוד וחיתוך בני מניה:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \; \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

מסקנה (סגור למשלים): $A \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$

הסתברות

הגדרה: מידת/פונקציית הסתברות היא פונקציה $\mathbb{P}:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ כך ש:

1 חיובית: $\forall A\in\mathcal{F}\ \ \mathbb{P}(A)\geq 0$

2 נרמול: $\mathbb{P}(\emptyset)=0,\ \mathbb{P}(\Omega)=1$

3 מאורעות זרים: לכל $A,B\in F$ כך ש $A\cap B=\emptyset$ מתקיים

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$$

באופן כללי לכל $A_1,A_2\ldots\in\mathcal{F}$ כך ש $A_i\cap A_j=\emptyset$ לכל $i\neq j$, מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)$$

דוגמאות

קוביות הוגנות: מטילים 2 קוביות הוגנות עם 6 פאות בכל אחת

Ω :

$$\Omega = \Big\{(i,j) : i,j \in \{1,2,\ldots,6\}\Big\}$$

$\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = 2^{\Omega} = \{S : S \subseteq \Omega\}$$

$\mathbb{P}$:

$$\forall\, S \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}(S) = \frac{|S|}{|\Omega|} = \frac{|S|}{36}$$

למשל $\mathbb{P}(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$ $\qquad$ $\mathbb{P}(\Omega) = \frac{|\Omega|}{36} = 1,$ $\qquad$ $\mathbb{P}(\emptyset) = \frac{0}{36} = 0,$

דוגמאות

נקודה אחידה בקטע: בוחרים נקודה אחידה בקטע $[a,b]$ עבור $a<b$ ממשיים

Ω :

$$\Omega=[a,b]$$

$\mathcal{F}$:

לא כל תת קבוצות, אלא רק חלק מהן

א. תת קטעים: לכל $a\le c<d\le b$ מתקיים $[c,d]\in\mathcal{F}$

ב. $\mathcal{F}$ סגורה למשלים, ואיחודים וחיתוכים בני מניה

$\mathbb{P}$:

א. תת קטעים: $\mathbb{P}([c,d])=\frac{d-c}{b-a}$

ב. שימוש בתכונה של התנהגות $\mathbb{P}$ על איחודים זרים

סיכום ביניים

מרחב הסתברות הוא שלשה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Ω מרחב המדגם : כל התוצאות האפשריות
$\mathcal{F}$ אוסף המאורעות : תת קבוצות של מרחב מדגם (סגור תחת כמה פעולות)
$\mathbb{P}$ מידת הסתברות : מתאימה לכל מאורע הסתברות

מסקנות

טענה (סיכוי של משלים): לכל $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

תזכורת $A^c = \Omega \setminus A$

טענה (יותר כללית): לכל $B \subseteq C$ ב $\mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(B \setminus C) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(C)$$

טענה (סיכוי של איחוד): לכל $A, B \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

סיבות:

$$A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$$

$$A \cap (B \setminus (A \cap B)) = \emptyset$$

$$A \cap B \subseteq B$$

הכלה-הדחה

סיכוי של איחוד: לכל $A, B \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

שלושה מאורעות: לכל $A, B, C \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = {} & \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ & - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

(תרגיל)

הכלה-הדחה

משפט (הכלה והדחה): לכל $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \sum_{1\le i<j<k<\ell\le n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_\ell) + \ldots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

התניה

"כיצד מידע על העולם משנה את תפישתנו?!"

מהו סיכוי שנפגוש אדם שגובהו קטן ממטר?
כיצד ישתנה כשנלך לגן ילדים?

הגדרה: בהנתן $B \in \mathcal{F}$ כך ש $\mathbb{P}(B) > 0$ נגדיר את ההסתברות של A בהנתן B כך

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

הערה: $A|B$ אינו מאורע

דוגמאות

מטילים קוביה הוגנת

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}, \qquad \mathcal{F} = 2^{\Omega}, \qquad \mathbb{P}(S) = \frac{|S|}{6}$$

נגדיר 2 מאורעות $A = \{4\}, B = \{4, 5, 6\}$

הסתברויות: $\mathbb{P}(B) = 1/2 \qquad \mathbb{P}(A) = 1/6,$

הסתברויות מותנות:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{1/6}{1/6} = 1$$

דוגמאות

בדיקות רפואיות

ישנה בדיקה למחלה (תשובות אפשריות $+, -$)

מהו מרחב מדגם?

$$\Omega = \{(h,+),(h,-),(s,+),(s,-)\}$$

חולים/בריאים: $S = \{(s,+),(s,-)\}$, $\quad H = \{(h,+),(h,-)\}$

חיובי/שלילי: $P = \{(h,+),(s,+)\}$, $\quad N = \{(h,-),(s,-)\}$

הרוב בריאים: $\mathbb{P}(H) = 0.99$

בדיקה "טובה": $\mathbb{P}(N|S) = 0.01$, $\quad \mathbb{P}(P|H) = 0.01$

לכן: $\mathbb{P}(P|S) = 0.99$, $\quad \mathbb{P}(N|H) = 0.99$

סיכוי להיות חולה בהנתן שבדיקה אמרה חיובי?

דוגמאות

בדיקות רפואיות

חולים S, בריאים H, חיובי P, שלילי N

הרוב בריאים: $\mathbb{P}(H) = 0.99$

בדיקה "טובה":

$$\mathbb{P}(P|H) = 0.01,\ \mathbb{P}(N|S) = 0.01,\ \mathbb{P}(N|H) = 0.99,\ \mathbb{P}(P|S) = 0.99$$

סיכוי להיות חולה בהנתן שחיובי? כלומר $\mathbb{P}(S|P) = \frac{\mathbb{P}(S\cap P)}{\mathbb{P}(P)}$?

$$\mathbb{P}(S \cap P) = \mathbb{P}(P|S) \cdot \mathbb{P}(S) = 0.99 \cdot 0.01 = 0.0099$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P) &= \mathbb{P}(P \cap H) + \mathbb{P}(P \cap S) = \mathbb{P}(P|H) \cdot \mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(P|S) \cdot \mathbb{P}(S) \\ &= 0.01 \cdot 0.99 + 0.99 \cdot 0.01 = 0.0198\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(S|P) = \frac{0.0198}{0.0099} = \frac{1}{2}$$

דוגמאות

בדיקות רפואיות

חולים S, בריאים H, חיובי P, שלילי N

הרוב בריאים: $\mathbb{P}(H) = 0.99$

בדיקה "טובה":

$$\mathbb{P}(P|H) = 0.01,\ \mathbb{P}(N|S) = 0.01,\ \mathbb{P}(N|H) = 0.99,\ \mathbb{P}(P|S) = 0.99$$

סיכוי להיות חולה בהנתן שחיובי? כלומר $\mathbb{P}(S|P) = \frac{\mathbb{P}(S\cap P)}{\mathbb{P}(P)}$? $1/2$

מסקנה: על מנת שבדיקה תהיה מהימנה, יכולת הגילוי שלה צריכה להיות טובה יותר מאחוז באוכלוסיה של תופעה שצריכה לבדוק

סיכום ביניים

מרחב הסתברות הוא שלשה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Ω מרחב המדגם : כל התוצאות האפשריות
$\mathcal{F}$ אוסף המאורעות : תת קבוצות של מרחב מדגם (סגור תחת כמה פעולות)
$\mathbb{P}$ מידת הסתברות : מתאימה לכל מאורע הסתברות

תכונות נוספות (למשל הכלה-הדחה)

התניה: כיצד מידע משנה תפישת עולם

נוסחת ההסתברות השלמה

לפעמים נוח יותר לחלק משימה מורכבת לתת משימות

כשנרצה לחשב הסתברות כלשהי, לעיתים יהיה נוח להשתמש בחלוקה של מרחב מדגם

הגדרה: הקבוצות $B_1, B_2, \ldots, B_n$ הם חלוקה של קבוצה C אם

א. $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = C$

ב. לכל $j \neq i$ ב $\{1, 2, \ldots, n\}$ מתקיים $B_i \cap B_j = \emptyset$

סימון: $C = B_1 \uplus B_2 \uplus \ldots \uplus B_n = \biguplus_{i=1}^{n} B_i$

טענה: אם $B_1, \ldots, B_n$ הם חלוקה של מרחב מדגם, אז לכל $A \in \mathcal{F}$

$$A = \biguplus_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

נוסחת ההסתברות השלמה

כשנרצה לחשב הסתברות כלשהי, לעיתים יהיה נוח להשתמש בחלוקה

משפט (נוסחת ההסתברות השלמה):
אם $B_1, \ldots, B_n$ חלוקה של Ω אז לכל $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B_1) + \mathbb{P}(A \cap B_2) + \ldots + \mathbb{P}(A \cap B_n)$$

בפרט אם $\mathbb{P}(B_i) > 0$ לכל $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ אז

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) + \ldots + \mathbb{P}(A|B_n) \cdot \mathbb{P}(B_n)$$

סיבה: $A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$ ותכונות של מידת הסתברות

הערה: נכון גם לגבי חלוקה אינסופית

דוגמאות

כשנרצה לחשב הסתברות כלשהי, לעיתים יהיה נוח להשתמש בחלוקה

שאלה יש כד עם 5 כדורים אדומים ו־3 כחולים. מוציאים מהכד 2 כדורים (ללא החזרה). מה הסיכוי שכדור שני שהוצא אדום?

פתרון נגדיר שני מאורעות: מאורע שכדור שני אדום A ומאורע שכדור ראשון אדום B

את המאורע B קל יותר להבין: $\mathbb{P}(B) = 5/8$

סיכוי של A בהנתן B? 4 אדומים ו־3 כחולים ולכן $\mathbb{P}(A|B) = 4/7$

נוסחת הסתברות שלמה:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c) = \frac{4}{7}\cdot\frac{5}{8} + \frac{5}{7}\cdot\frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

האם זה מפתיע?

לא: כדור שני מתפלג בדיוק כמו כדור ראשון

דוגמאות

שאלה מטילים מטבע הוגן עד שיוצא פלי. יהי k מספר הפעמים שהטלנו מטבע (ערכים מ1 עד אינסוף). יהי x מספר שלם המתפלג באופן אחיד בין 1 ל k (אם k סופי). מה הסיכוי ש$x = 5$?

פתרון נגדיר מאורע $A = \{x = 5\}$

לכל $i \in \{1, 2, \dots\}$ נגדיר מאורע $B_i = \{k = i\}$ ונגדיר $C = (\cup_{i\in\{1,2,\dots\}} B_i)^c$

המאורעות $C, B_1, B_2, \dots$ הם חלוקה של Ω ולכן

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap C) + \sum_{i\in\{1,2,\dots\}} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

נשים לב

$$0 \leq \mathbb{P}(A \cap C) \leq \mathbb{P}(C) = 0, \quad \mathbb{P}(B_i) = 2^{-i}, \quad \mathbb{P}(A|B_i) = \begin{cases} 0 & 1 \leq i \leq 4 \\ 1/i & i \geq 5 \end{cases}$$

ולכן

$$\mathbb{P}(A) = 0 + \sum_{i\geq 5} \frac{1}{i \cdot 2^i} = \frac{1}{5 \cdot 32} + \frac{1}{6 \cdot 64} + \dots \approx 0.010855$$

דוגמאות: פרדוקס?

באוניברסיטה בארה"ב נרשמו נשים וגברים. התפרסמה כתבה בעיתון שאומרת שנשים מופלות לרעה מכיוון שאחוז נשים שהתקבלו (מקרב נשים שנרשמו) נמוך מאחוז גברים שהתקבלו (מקרב גברים שנרשמו).

בבדיקה מעמיקה שנערכה התבררו הממצאים הבאים: בכל מחלקה בנפרד התופעה ההפוכה התקיימה (מנקודת מבט מחלקתית "נשים מופלות לטובה").

הכיצד?
נשים נרשמו למחלקות שקשה יותר להתקבל אליהן

למשל: שתי מחלקות 1,2
סיכויי קבלה לנשים: 100 אחוז ל1 ו10 אחוז ל2
סיכויי קבלה לגברים: 98 אחוז ל1 ו0 אחוז ל2
נניח שכל הנשים וחצי מהגברים נרשמו ל2
אז 10 אחוז מנשים ו49 אחוז מגברים התקבלו סך הכל

סיכום ביניים (1)

מרחב הסתברות הוא שלשה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

תכונות נוספות (למשל הכלה-הדחה)

התניה: כיצד מידע משנה תפישת עולם

נוסחת הסתברות שלמה: שימוש בחלוקה של מרחב מדגם

Bayes

משפט (נוסחת בייס): בהנתן שני מאורעות A, B עם הסתברויות חיוביות, מתקיים

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

מאפשרת להפוך התניה ושימושית במקרים רבים:

א. תורת למידה ובינה מלאכותית

ב. סינון דואר זבל (*spam filters*)

ג. שיווק

ד. ניתוח מאורעות (כיצד לעדכן תפישת עולם בהנתן מידע חדש?)

דוגמא (דואר זבל): ישנן הודעות תרמית ברמה מאוד נמוכה - מדוע?

בהנתן שמישהו מגיב להודעה, הסיכוי להצליח הוא יותר גבוה

$$\mathbb{P}(success \mid response) = \frac{\mathbb{P}(response \mid success)\mathbb{P}(success)}{\mathbb{P}(response)}$$

תלות

האם גובה של אדם תלוי בסביבתו?
האם זכיה בלוטו תלויה בהיסטוריה?
אם לא זוכים בלוטו הרבה זמן, האם הגיע הזמן?

הגדרה: מאורעות A, B הם בלתי תלויים (ב״ת) אם
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

אבחנה: אם $\mathbb{P}(B) > 0$ אז A, B ב״ת אם ורק אם $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

״המידע ש B מספק לא משנה את תפישת עולמנו לגבי A״

טענה: אם $\mathbb{P}(A) = 0$ או $\mathbb{P}(B) = 0$ אז הם ב״ת

דוגמאות

מטילים 2 קוביות הוגנות

$$\Omega = \{1,2,\dots,6\} \times \{1,2,\dots,6\}, \qquad \mathcal{F} = 2^\Omega, \qquad \mathbb{P}(S) = \frac{|S|}{|\Omega|}$$

נגדיר 3 מאורעות: $A = \{(i,j) : i \in \{2,4,6\}\}$

$$B = \{(i,j) : j \in \{2,4,6\}\}$$

$$C = \{(i,j) : i+j = 9\}$$

האם A, B ב"ת?

נחשב:

$$A \cap B = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$$

ומתקיים

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 9/36 = 1/4 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

כי

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$$

דוגמאות

מטילים 2 קוביות הוגנות

$$\Omega = \{1,2,\ldots,6\} \times \{1,2,\ldots,6\}, \qquad \mathcal{F} = 2^{\Omega}, \qquad \mathbb{P}(S) = \frac{|S|}{|\Omega|}$$

נגדיר 3 מאורעות: $A = \{(i,j) : i \in \{2,4,6\}\}$

$$B = \{(i,j) : j \in \{2,4,6\}\}$$

$$C = \{(i,j) : i + j = 9\}$$

האם A, C ב"ת?

נחשב:

$$C = \{(6,3),(3,6),(4,5),(5,4)\} \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(C) = 4/36 = 1/9$$

ובדומה

$$A \cap C = \{(6,3),(4,5)\} \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(A \cap C) = 2/36 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$$

דוגמאות

מטילים 2 קוביות הוגנות

$$\Omega = \{1,2,\dots,6\} \times \{1,2,\dots,6\}, \qquad \mathcal{F} = 2^{\Omega}, \qquad \mathbb{P}(S) = \frac{|S|}{|\Omega|}$$

נגדיר 3 מאורעות: $A = \{(i,j) : i \in \{2,4,6\}\}$

$$B = \{(i,j) : j \in \{2,4,6\}\}$$

$$C = \{(i,j) : i + j = 9\}$$

האם B, C ב״ת?

כן - כמו A, C

דוגמאות

מטילים 2 קוביות הוגנות

$$\Omega = \{1,2,\dots,6\} \times \{1,2,\dots,6\}, \qquad \mathcal{F} = 2^{\Omega}, \qquad \mathbb{P}(S) = \frac{|S|}{|\Omega|}$$

נוסיף מאורע: $A = \{(i,j) : i \in \{2,4,6\}\}$

$$B = \{(i,j) : j \in \{2,4,6\}\}$$

$$C = \{(i,j) : i + j = 9\}$$

$$D = \{(i,j) : i + j = 8\}$$

האם A, D ב״ת?

נחשב:

$$D = \{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(D) = 5/36$$

ובדומה

$$A \cap D = \{(2,6),(6,2),(4,4)\} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(A \cap D) = 3/36 \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(D)$$

תלות

הגדרנו מתי 2 מאורעות בלתי תלויים. מתי 3 הם ב״ת?

הגדרה: מאורעות A, B, C הם בלתי תלויים אם הם ב״ת בזוגות וגם
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

(סה״כ 4 שוויונים)

דוגמא

מטילים 2 קוביות הוגנות

$$\Omega = \{1,2,\ldots,6\} \times \{1,2,\ldots,6\}, \qquad \mathcal{F} = 2^{\Omega}, \qquad \mathbb{P}(S) = \frac{|S|}{|\Omega|}$$

נגדיר 3 מאורעות: $A = \{(i,j) : i \in \{2,4,6\}\}$

$$B = \{(i,j) : j \in \{2,4,6\}\}$$

$$C = \{(i,j) : i + j = 9\}$$

ראינו ש A, B, C ב"ת בזוגות

האם הם בלתי תלויים (כשלשה)?

נשים לב כי: $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C) > 0$

אבל אם גם A וגם B מתקיימים אז סכום קוביות זוגי ולכן C לא מתקיים:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

תלות

הגדרנו מתי 2 מאורעות בלתי תלויים. מתי 3 הם ב״ת?

הגדרה: מאורעות A, B, C הם בלתי תלויים אם הם ב״ת בזוגות וגם

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$$

(סה״כ 4 שוויונים)

מסקנה: מאורעות יכולים להיות ב״ת בזוגות אבל תלויים (לא בלתי תלויים)

תלות: סיכום

הגדרנו מתי 2,3 מאורעות בלתי תלויים. מתי n הם ב״ת?

הגדרה: מאורעות $A_1, A_2, \ldots, A_n$ הם בלתי תלויים אם לכל תת קבוצה לא ריקה $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ מתקיים

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right) = \prod_{i\in A} \mathbb{P}(A_i)$$

סיכום ביניים

- מרחב הסתברות הוא שלשה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- תכונות נוספות (למשל הכלה-הדחה)
- התניה: כיצד מידע משנה תפישת עולם
- נוסחת הסתברות שלמה: שימוש בחלוקה של מרחב מדגם
- תלות וחוסר תלות בין מאורעות